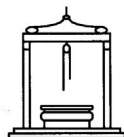


FACOLTÀ DI INGEGNERIA



CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA ELETTRONICA

SEMINARIO PER IL CORSO  
DI CAMPI ELETTROMAGNETICI II

---

***RAPPRESENTAZIONI INTEGRALI  
DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO  
ED EQUAZIONI INTEGRALI AL CONTORNO***

---

PAOLO BURGHIGNOLI



Università "La Sapienza" di Roma

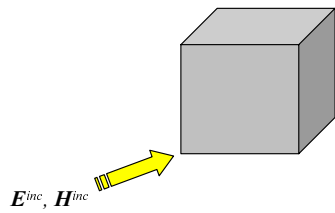
---

ROMA A.A. 2002-2003

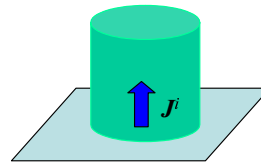
Le Equazioni Integrali al Contorno (in inglese *Boundary Integral Equations*, o BIE) sono uno strumento potente ed elegante per la formulazione, lo studio analitico e la risoluzione numerica di una vasta classe di problemi in elettromagnetismo. In questo seminario si vuole fornire un'introduzione alle BIE, alla loro formulazione a partire dalle Rappresentazioni Integrali al Contorno (in inglese *Boundary Integral Representations*, o BIR) e alle loro principali proprietà analitiche e numeriche.

Mediante BIE è possibile affrontare problemi di scattering, di radiazione e di risonanza in cui sono coinvolti oggetti costituiti da conduttori e/o da dielettrici omogenei, sia in due sia in tre dimensioni. In Fig. 1.1 sono mostrati alcuni esempi tipici. In Fig. 1.1(a) è schematizzato un problema di scattering da oggetto conduttore; il campo incidente, che è per definizione il campo elettromagnetico che esisterebbe se non ci fosse l'oggetto scatterante, è ad esempio un'onda piana dello spazio libero. La Fig. 1.1(b) mostra un problema di radiazione in cui le correnti impresse si trovano all'interno di una regione dielettrica omogenea, situazione che si presenta nello studio di antenne dielettriche. In Fig. 1.1(c) si ha ancora un problema di radiazione, un'antenna a patch su substrato di estensione finita eccitata da una corrente magnetica impressa, in cui la regione dielettrica che contiene la sorgente è parzialmente ricoperta da metallizzazioni di spessore infinitesimo. In Fig. 1.1(d) si mostra infine un oggetto dielettrico posto nello spazio libero in assenza di sorgenti, di cui si vogliono studiare i modi di risonanza.

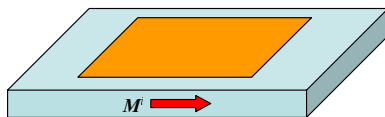
Le incognite delle equazioni integrali al contorno sono le correnti magnetiche ed elettriche tangenziali definite sulle superfici di interfaccia fra i mezzi presenti. Ciò costituisce il vantaggio fondamentale delle BIE rispetto a formulazioni alternative dei medesimi problemi, basate su equazioni differenziali a derivate parziali munite delle opportune condizioni al contorno (*formulazioni differenziali*), ovvero basate sulla minimizzazione di funzionali definiti su opportuni spazi di funzioni (*formulazioni variazionali*), o ancora basate su equazioni integrali di volume. Il dominio in cui sono definite le incognite delle BIE ha infatti una dimensione in meno rispetto al dominio in cui esiste il campo elettromagnetico, essendo costituito da una superficie nel caso di problemi tridimensionali, da una curva nel caso di problemi bidimensionali; questo comporta una notevole riduzione del numero delle incognite che si presentano nella discretizzazione numerica delle equazioni.



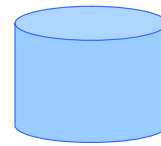
(a) Scattering di un'onda piana da cubo conduttore posto nello spazio libero.



(b) Antenna a risonatore dielettrico su piano di massa, eccitata da una corrente elettrica impressa.



(c) Antenna a patch su substrato dielettrico di estensione finita con piano di massa, eccitata da una corrente magnetica impressa.



(d) Risonatore dielettrico nello spazio libero, in assenza di correnti impresses.

**Figura 1.1:** Esempi di problemi elettromagnetici che si possono studiare con le equazioni integrali al contorno.

Un altro vantaggio fondamentale delle BIE consiste inoltre nella possibilità di garantire che le soluzioni soddisfino le condizioni al contorno all'infinito, imponendo che queste condizioni siano soddisfatte dalle funzioni di Green con cui si costruiscono i kernel delle equazioni integrali; non si richiede dunque di simulare artificialmente tali condizioni al contorno su superfici al finito, come accade nel caso delle formulazioni differenziali.

Il contenuto di questa dispensa è il seguente. Nel Cap. 2 vengono richiamate le rappresentazioni integrali al contorno del tipo di Stratton-Chu per il campo elettromagnetico, mettendone in luce le proprietà più notevoli che intervengono nella formulazione delle equazioni integrali al contorno. Nel Cap. 3 vengono quindi illustrate le principali famiglie di BIE utilizzate per l'analisi di problemi elettromagnetici che coinvolgono mezzi conduttori e dielettrici, illustrandone sommariamente le caratteristiche analitiche e numeriche.

Si avverte che nella stesura di queste note si è data per scontata la conoscenza degli argomenti trattati nel corso di Campi Elettromagnetici II. Si aggiunge infine che, vista l'ampiezza dell'argomento affrontato, il seminario ha necessariamente carattere introduttivo: la scelta degli argomenti presentati dipende dall'esperienza e dai gusti dell'autore, che invita i lettori interessati ad approfondire la conoscenza della materia consultando i libri e gli articoli riportati in bibliografia (e in particolare [1]).

## Rappresentazioni Integrali del Campo Elettromagnetico

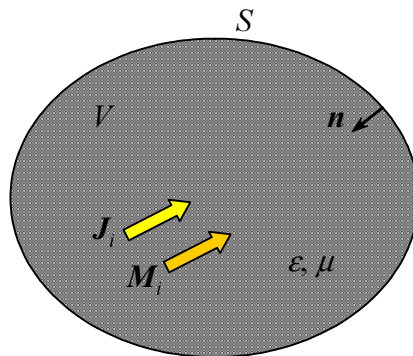
Si consideri un aperto regolare  $V \subset \mathbb{R}^3$  (vedi Fig. 2.1), per il momento supposto limitato, con frontiera  $S = \partial V$ , occupato da un mezzo lineare, stazionario, omogeneo e isotropo, con costanti primarie  $\varepsilon, \mu \in \mathbb{C}$  (supponiamo di operare nel dominio dei fasori, assumendo e sopprimendo una dipendenza dal tempo del tipo  $e^{j\omega t}$ ). La normale  $\mathbf{n}$  sia diretta verso l'interno di  $V$ . All'interno di  $V$  siano presenti le correnti impresse  $\mathbf{J}^i$  (elettrica) e  $\mathbf{M}^i$  (magnetica).

Il campo elettromagnetico in  $V$  soddisfa allora le Equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{M}^i(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j\omega\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}^i(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (2.0.1)$$

Introducendo una funzione diadica di Green  $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  che soddisfa in  $V$  la:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k^2 \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -j\omega\mu \mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.0.2)$$



**Figura 2.1:** Regione limitata  $V$  con frontiera  $S$ , occupata da un mezzo lineare, stazionario, omogeneo e isotropo, con costanti primarie  $\varepsilon, \mu$ , contenente le correnti impresse  $\mathbf{J}^i$  (elettrica) e  $\mathbf{M}^i$  (magnetica).

dove  $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$ , mediante le formule di Green generalizzate è possibile ricavare la seguente fondamentale rappresentazione integrale del campo elettromagnetico [1]-[4]:

$$-j\omega\mu \int_S \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' + \int_S \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V \\ \mathbf{0} & \mathbf{r} \notin \bar{V} \end{cases} \quad (2.0.3)$$

$$j\omega\varepsilon \int_S \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' + \int_S \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' + \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V \\ \mathbf{0} & \mathbf{r} \notin \bar{V} \end{cases} \quad (2.0.4)$$

dove  $\bar{V} = V \cup \partial V$  è la chiusura di  $V$ , ed i campi  $\mathbf{E}^i(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$  sono dati dalle:

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \int_V \mathbf{J}^i(\mathbf{r}') \cdot \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' - \int_V \mathbf{M}^i(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}'. \quad (2.0.5)$$

$$\mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = -j\omega\varepsilon \int_V \mathbf{M}^i(\mathbf{r}') \cdot \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' + \int_V \mathbf{J}^i(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}'. \quad (2.0.6)$$

Nelle (2.0.3), (2.0.4) il campo elettromagnetico in  $V$  è espresso come somma di due contributi: un contributo è costituito dagli integrali di volume (2.0.5), (2.0.6) che definiscono i campi  $\mathbf{E}^i(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$ , che contengono le correnti impresse  $\mathbf{J}^i$  e  $\mathbf{M}^i$ ; l'altro contributo è costituito dagli integrali di superficie che contengono le componenti tangenziali  $\mathbf{E}_\tau$ ,  $\mathbf{H}_\tau$  dei campi sul contorno  $S$  (si tenga presente che  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_\tau$  e  $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_\tau$ ). La presenza del contributo degli integrali di superficie giustifica il nome di rappresentazioni integrali al contorno (BIR) che si dà alle (2.0.3), (2.0.4).

Le BIR (2.0.3), (2.0.4) rappresentano la formalizzazione elettrodinamica vettoriale del Principio di Huygens, già noto dal corso di Fisica II dove lo si è visto nella forma scalare utilizzata in ottica (integrale di Kirchhoff): secondo tale principio, il campo elettromagnetico è univocamente determinato in una regione dello spazio priva di sorgenti una volta che siano note le sue componenti tangenziali sulla frontiera di tale regione.

Nel seguito ci si propone di esporre alcune osservazioni e commenti sulle (2.0.3), (2.0.4).

## 2.1 La funzione di Green, i Teoremi di Unicità e di Equivalenza

Va intanto osservato che la funzione di Green diadica utilizzata per ricavare le BIR (2.0.3), (2.0.4) non è univocamente determinata. Infatti, l'equazione differenziale a derivate parziali (2.0.2) ha infinite

soluzioni; corredandola con opportune condizioni al contorno, è possibile individuare soluzioni particolari più o meno convenienti a seconda del problema da risolvere. Ad esempio, se la frontiera  $S$  è costituita da un conduttore ideale, il campo  $\mathbf{E}$  soddisferà su  $S$  la  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ; scegliendo allora una  $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underline{\mathbf{G}}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  tale che  $\underline{\mathbf{G}}_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{0}$  per  $\mathbf{r} \in S$ , dalla (2.0.3) si deduce, per  $\mathbf{r} \in V$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \int_V \mathbf{J}^i(\mathbf{r}') \cdot \underline{\mathbf{G}}_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}' - \int_V \mathbf{M}^i(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \times \underline{\mathbf{G}}_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}'. \quad (2.1.1)$$

In questo caso l'integrale di frontiera nella (2.0.3) è nullo, e il problema della rappresentazione del campo elettromagnetico è risolto in forma esplicita, giacché la (2.1.1) fornisce il campo  $\mathbf{E}$  in tutto  $V$  in termini di funzioni note (le  $\underline{\mathbf{G}}_D$ ,  $\mathbf{J}^i$  e  $\mathbf{M}^i$  che figurano al secondo membro). Il campo  $\mathbf{H}$  si deduce poi da  $\mathbf{E}$  tramite le Equazioni di Maxwell. Analogamente, se su  $S$  vale la condizione al contorno  $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$  (parete magnetica perfetta), converrà scegliere  $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underline{\mathbf{G}}_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  tale che  $\nabla \times \underline{\mathbf{G}}_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{0}$  per  $\mathbf{r} \in S$ : in questo modo gli integrali di superficie nella (2.0.3) sono nulli, e vale ancora la (2.1.1) con  $\underline{\mathbf{G}}_N$  al posto di  $\underline{\mathbf{G}}_D$ .

La determinazione in forma chiusa di una funzione di Green che soddisfi a specifiche condizioni al contorno su  $S$  è però possibile solo se  $S$  è di forma molto particolare (se è una superficie coordinata di un sistema di coordinate curvilinee in cui l'equazione di Helmholtz vettoriale si risolve per separazione di variabili) [4]. Nel caso generale in cui  $S$  è di forma arbitraria si rinuncia a richiedere che la  $\underline{\mathbf{G}}$  soddisfi condizioni al contorno su  $S$ ; si utilizza invece la funzione di Green dello spazio libero occupato dal mezzo che riempie  $V$ , richiedendo che essa soddisfi la condizione di radiazione all'infinito (detta di Silver-Müller [3]):

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r [\nabla \times \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + jk\mathbf{r}_0 \times \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = \mathbf{0} \quad (2.1.2)$$

uniformemente rispetto a  $\mathbf{r}_0$ , dove  $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_0$  ( $|\mathbf{r}_0| = 1$ ). Come è noto, risulta allora ([4], [5]):

$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left( \mathbf{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.1.3)$$

essendo  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  la funzione di Green scalare dello spazio libero per l'equazione di Helmholtz:

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (2.1.4)$$

che soddisfa la condizione di radiazione all'infinito (di Sommerfeld):

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r \left[ \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r} + jkg(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] = 0 \quad (2.1.5)$$

sempre uniformemente rispetto a  $\mathbf{r}_0$ . Le (2.0.3), (2.0.4) con la (2.1.3) si possono allora riscrivere

facendo intervenire esplicitamente la  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  e le sue derivate spaziali:

$$-j\omega\mu \int_S \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_S [\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \times \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' +$$

$$-\frac{j}{\omega\varepsilon} \int_S [\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')] \cdot \nabla' \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V \\ \mathbf{0} & \mathbf{r} \notin \bar{V} \end{cases}$$

(2.1.6)

$$j\omega\varepsilon \int_S \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_S [\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')] \times \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' +$$

$$+\frac{j}{\omega\mu} \int_S [\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \nabla' \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V \\ \mathbf{0} & \mathbf{r} \notin \bar{V} \end{cases}$$

(2.1.7)

Si osservi che, essendo  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ , nelle (2.1.6), (2.1.7) sarebbe possibile omettere ovunque gli argomenti della funzione di Green  $g$ . Nel seguito si farà riferimento esclusivamente alle BIR (2.1.6), (2.1.7).

La scelta della funzione di Green dello spazio libero (2.1.3) consente di ricavare una rappresentazione integrale al contorno per il campo elettromagnetico in una regione  $V$  illimitata in termini delle sue componenti tangenziali sulla frontiera  $S = \partial V$ . Infatti, considerando una sfera  $B_R(\mathbf{0})$  con centro nell'origine e raggio  $R$ , è intanto possibile rappresentare il campo, mediante le (2.0.3), (2.0.4), nella regione limitata costituita dall'intersezione di  $V$  con  $B_R(\mathbf{0})$ . Facendo tendere  $R$  all'infinito, il contributo della frontiera della sfera tende a zero in virtù della condizione al contorno all'infinito che si suppone sia soddisfatta sia dalla funzione di Green sia dal campo (la verifica non è difficile; si noti che la supposta uniformità del limite nella (2.1.2) consente il passaggio al limite sotto il segno di integrale). Rimane dunque il solo contributo della frontiera  $S$  al finito che, sommato ai campi  $\mathbf{E}^i$  e  $\mathbf{H}^i$ , fornisce la rappresentazione integrale al contorno del campo per la regione illimitata  $V$ .

Ancora a proposito della scelta della funzione di Green nelle BIR, si osservi che le (2.0.3), (2.0.4) non sono in contraddizione con i noti Teoremi di Unicità dell'elettromagnetismo, che garantiscono l'unicità della soluzione per le Equazioni di Maxwell in  $V$  una volta che sia assegnata sulla frontiera  $S$  di  $V$  la componente tangenziale di  $\mathbf{E}$  oppure di  $\mathbf{H}$  (cioè, non di entrambi). Infatti, a patto di scegliere opportunamente la funzione di Green  $\underline{G}$ , è possibile rappresentare il campo elettromagnetico in  $V$  in termini della sola componente del campo nota sulla frontiera  $S$  (un esempio è fornito dalla (2.1.1), in cui era nota e pari a zero la componente tangenziale di  $\mathbf{E}$  sulla frontiera); ciò richiede, come già

detto, di utilizzare funzioni di Green che soddisfino opportune condizioni al contorno su  $S$ ; tuttavia, generalmente, tali funzioni di Green non sono disponibili in forma chiusa.

Facendo uso della funzione di Green per lo spazio libero nelle (2.0.3), (2.0.4), si evidenzia inoltre come tali rappresentazioni integrali al contorno esprimano una forma del cosiddetto Teorema di Equivalenza. Definiamo a questo scopo le densità superficiali equivalenti di corrente elettrica e magnetica  $\mathbf{J}_S$  e  $\mathbf{M}_S$  secondo le:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_S(\mathbf{r}) &= \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{M}_S(\mathbf{r}) &= -\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (2.1.8)$$

Le (2.1.6), (2.1.7) si riscrivono allora:

$$L_E[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V \\ \mathbf{0} & \mathbf{r} \notin \bar{V} \end{cases}\quad (2.1.9)$$

$$L_H[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] + \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V \\ \mathbf{0} & \mathbf{r} \notin \bar{V} \end{cases}\quad (2.1.10)$$

avendo introdotto gli operatori integrali al contorno  $L_E$ ,  $L_H$  definiti dalle:

$$\begin{aligned}L_E[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] &= -j\omega\mu \int_S \mathbf{J}_S(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\mathbf{r}' - \int_S \mathbf{M}_S(\mathbf{r}') \times \nabla'g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\mathbf{r}' + \\ &\quad - \frac{j}{\omega\varepsilon} \int_S \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \cdot \nabla'\nabla'g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\mathbf{r}'\end{aligned}\quad (2.1.11)$$

$$\begin{aligned}L_H[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] &= -j\omega\varepsilon \int_S \mathbf{M}_S(\mathbf{r}')g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\mathbf{r}' + \int_S \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \times \nabla'g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\mathbf{r}' + \\ &\quad - \frac{j}{\omega\mu} \int_S \mathbf{M}_S(\mathbf{r}') \cdot \nabla'\nabla'g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d\mathbf{r}'\end{aligned}\quad (2.1.12)$$

I campi  $\mathbf{E}^i(\mathbf{r})$  e  $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$  sono in questo caso i campi che sarebbero irradiati dalle correnti impresse  $\mathbf{J}^i$  e  $\mathbf{M}^i$  in assenza di contorni al finito, ossia nello spazio libero; essi, nella terminologia adottata nell'ambito dei problemi di scattering, costituiscono cioè i campi incidenti (da cui l'apice 'i'). Stante l'identità formale fra gli integrali di volume (2.0.5) e (2.0.6) che definiscono i campi incidenti e gli integrali di superficie che figurano nelle (2.1.9), (2.1.10), è possibile leggere il contributo degli integrali di superficie come il campo che sarebbe irradiato dalle distribuzioni di correnti superficiali impresse  $\mathbf{J}_S$  e  $\mathbf{M}_S$  nello spazio libero occupato dal mezzo che riempie il volume  $V$ . Tali correnti superficiali, insieme con le correnti impresse di volume, costituiscono pertanto, nello spazio libero, un sistema

di correnti *equivalenti* al problema originale (da cui il loro nome) ai fini della rappresentazione del campo in  $V$ . Questa è appunto una forma del Teorema di Equivalenza sopra menzionato; altre forme si ottengono facendo uso di funzioni di Green diverse, ma su ciò non ci si dilungherà (si veda, ad es., [4]). Si noti solo che l'equivalenza vale, come già detto, ai soli fini della rappresentazione del campo in  $V$ : al di fuori di  $\bar{V}$  l'insieme delle correnti impresse di volume e delle correnti equivalenti di superficie irradia un campo identicamente nullo.

## 2.2 Singolarità dei kernel, rappresentazioni alternative

Si osservi ora un po' più da vicino la forma degli integrali di superficie che figurano nelle (2.1.9), (2.1.10); si consideri in particolare la rappresentazione (2.1.9) per il campo elettrico, valendo per il campo magnetico considerazioni analoghe, per dualità. Nei tre integrali di superficie nella (2.1.9) sono presenti, nell'ordine, la funzione scalare di Green  $g$ , il suo gradiente  $\nabla'g$  e il doppio gradiente (diadico)  $\nabla'\nabla'g$ . Ciascuno di questi termini presenta una singolarità algebrica per  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ , ma il grado di singolarità è diverso nei tre casi ([5]): la  $g$  ha il fattore  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  al denominatore e pertanto ha una singolarità di ordine uno (sommabile su una superficie bidimensionale); il gradiente  $\nabla'g$  ha singolarità di ordine due (al limite di sommabilità su una superficie); il doppio gradiente  $\nabla'\nabla'g$  ha singolarità di ordine 3 (ipersingolare, non sommabile su una superficie). Per approfondire il tema interessante della singolarità dei kernel si rimanda a [6]-[11].

E' facile prevedere che gli operatori integrali con kernel fortemente singolare siano più delicati da trattare quando si vogliono risolvere numericamente le equazioni integrali al contorno [1], [2]. E' però possibile dedurre dalle (2.1.9), (2.1.10) rappresentazioni alternative, che hanno kernel con minore grado di singolarità, trasferendo in parte o del tutto le derivate spaziali dalla funzione di Green  $g$  alle correnti superficiali  $\mathbf{J}_S$  e  $\mathbf{M}_S$ , ed eventualmente portando tali derivate fuori dagli integrali stessi.

Ad esempio, si consideri l'integrale di superficie che contiene il gradiente di  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  nella rappresentazione (2.1.9) per il campo elettrico:

$$I_2 = - \int_S \mathbf{M}_S(\mathbf{r}') \times \nabla'g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.2.1)$$

Tenendo conto che  $\nabla'g = -\nabla g$ , si ha intanto:

$$I_2 = \int_S \mathbf{M}_S(\mathbf{r}') \times \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.2.2)$$

Dall'identità vettoriale  $\nabla \times (f\mathbf{A}) = \nabla f \times \mathbf{A} + f\nabla \times \mathbf{A}$ , in cui si ponga  $f = g$  e  $\mathbf{A} = \mathbf{M}_S$ , si ha:

$$\mathbf{M}_S(\mathbf{r}') \times \nabla g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla \times [g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{M}_S(\mathbf{r}')] + g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla \times \mathbf{M}_S(\mathbf{r}') \quad (2.2.3)$$

Poiché  $M_S$  è funzione di  $\mathbf{r}'$  e l'operatore differenziale nabla  $\nabla$  opera su  $\mathbf{r}$ , si ha  $\nabla \times M_S(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ , quindi:

$$I_2 = - \int_S \nabla \times [g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') M_S(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' = - \nabla \times \int_S g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') M_S(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.2.4)$$

Nell'ultimo passaggio si è portato fuori dall'integrale l'operatore nabla  $\nabla$ , che opera su  $\mathbf{r}$ , cosa lecita perché l'integrale è fatto rispetto a  $\mathbf{r}'$ . Si riconosce in questa espressione il contributo alla rappresentazione del campo elettrico  $\mathbf{E}$  di un potenziale vettore elettrico  $\mathbf{F}$  (di Lorenz) espresso dalla

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_S g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') M_S(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.2.5)$$

Si noti come l'integrando nella (2.2.5) abbia singolarità di ordine uno. La riduzione dell'ordine di singolarità rispetto alla (2.2.1) è stata ottenuta al costo di portare un operatore nabla  $\nabla$  fuori dall'integrale.

In modo analogo, si consideri l'integrale di superficie che contiene il doppio gradiente, sempre nella (2.1.9):

$$I_3 = - \frac{j}{\omega \varepsilon} \int_S \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.2.6)$$

Come prima, dalla  $\nabla' g = -\nabla g$  si ha:

$$I_3 = \frac{j}{\omega \varepsilon} \int_S \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \cdot \nabla \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.2.7)$$

Si consideri ora l'identità vettoriale

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.2.8)$$

ponendovi  $\mathbf{A} = \mathbf{J}_S$ ,  $\mathbf{B} = \nabla' g$ . Si ha:

$$\begin{aligned} \nabla [\mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \cdot \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] &= \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \nabla \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') + \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \cdot \nabla \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \\ &+ \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \times \nabla \times \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \nabla \times \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Ora,  $\nabla \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$  e  $\nabla \times \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$  perché  $\mathbf{J}_S$  non dipende da  $\mathbf{r}$ , mentre  $\nabla \times \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla' \times \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{0}$  perché il rotore di un gradiente è nullo. Quindi:

$$\nabla [\mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \cdot \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \cdot \nabla \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.2.10)$$

e allora

$$I_3 = \frac{j}{\omega \varepsilon} \int_S \nabla [\mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \cdot \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] d\mathbf{r}' = \frac{j}{\omega \varepsilon} \nabla \int_S \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \cdot \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.2.11)$$

A questo punto il grado di singolarità del kernel è stato ridotto da tre a due. Tuttavia è possibile andare oltre: si consideri l'identità vettoriale  $\nabla' \cdot (f \mathbf{A}) = \nabla' f \cdot \mathbf{A} + f \nabla' \cdot \mathbf{A}$ ; si ha, ponendo  $f = g$  e  $\mathbf{A} = \mathbf{J}_S$ :

$$\mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \cdot \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla' \cdot [g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_S(\mathbf{r}')] - g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \quad (2.2.12)$$

e al secondo membro si osserva che l'operatore nabra  $\nabla$  opera su vettori che hanno solo componenti tangenziali rispetto alla superficie  $S$ ; pertanto lo si può sostituire con un operatore nabra tangenziale  $\nabla'_S$ :

$$I_3 = \frac{j}{\omega\epsilon} \nabla \left[ \int_S \nabla'_S \cdot [g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}_S(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' - \int_S g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_S \cdot \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right] \quad (2.2.13)$$

Il primo integrale è nullo, essendo il flusso di una divergenza superficiale su una superficie chiusa. Pertanto si ha:

$$I_3 = -\frac{j}{\omega\epsilon} \nabla \int_S g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_S \cdot \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.2.14)$$

Per l'equazione di continuità superficiale della carica si ha  $\nabla'_S \cdot \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') = -j\omega\rho_S$ , quindi

$$I_3 = -\frac{j}{\omega\epsilon} \nabla \int_S g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [-j\omega\rho_S(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}' = -\nabla \int_S g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\rho_S(\mathbf{r}')}{\epsilon} d\mathbf{r}' \quad (2.2.15)$$

Si riconosce come questo integrale sia il contributo alla rappresentazione del campo elettrico  $\mathbf{E}$  di un potenziale scalare  $\Phi$  (di Lorenz), espresso da

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_S g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\rho_S(\mathbf{r}')}{\epsilon} d\mathbf{r}' \quad (2.2.16)$$

Anche qui l'integrando ha singolarità di ordine uno; in questo caso non solo un operatore nabra è stato portato fuori dall'integrale, ma un altro operatore nabra è stato trasferito dalla funzione di Green alla corrente superficiale  $\mathbf{J}_S$ .

Si vede quindi come esistano molti tipi di rappresentazioni integrali al contorno, sia perché è possibile scegliere in diversi modi la funzione di Green che figura nei kernel degli operatori integrali coinvolti, sia perché è possibile collocare in più modi gli operatori di derivazione spaziale all'interno o all'esterno degli operatori integrali. Corrispondentemente, sarà possibile dedurre dalle varie BIR diversi tipi di equazioni integrali al contorno, ciascuna delle quali sarà dotata di specifiche proprietà analitiche e numeriche.

### 2.3 Discontinuità sulla frontiera

Si consideri infine cosa accade quando il punto di osservazione  $\mathbf{r}$  nelle BIR (2.1.9), (2.1.10) viene fatto tendere a un punto  $\mathbf{r}_0$  sulla frontiera  $S$  di  $V$ . Le proprietà fondamentali degli operatori integrali che coinvolgono la  $g$  e il suo gradiente sono al riguardo le seguenti ([1]-[5]):

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0^\pm} \int_S g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \int_S g(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.3.1)$$

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0^\pm} \int_S \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \int_S \nabla' g(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \pm \frac{1}{2} \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \Phi(\mathbf{r}_0) \quad (2.3.2)$$

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0^\pm} \int_S \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \mathbf{A}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \oint_S \nabla' g(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') \times \mathbf{A}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \pm \frac{1}{2} \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_0) \quad (2.3.3)$$

dove con il simbolo  $\pm$  si intende che il limite viene fatto da punti interni (+) o esterni (-) al volume  $V$ , e  $\oint$  indica un integrale a valor principale.

A partire dalle (2.3.1)-(2.3.3) è possibile dedurre che:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \left[ \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0^+} L_E[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0^-} L_E[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] \right] = -\mathbf{M}_S(\mathbf{r}_0) \quad (2.3.4)$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \left[ \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0^+} L_H[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0^-} L_H[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] \right] = \mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0) \quad (2.3.5)$$

Va osservato che le (2.3.4), (2.3.5) valgono per  $\mathbf{J}_S$  e  $\mathbf{M}_S$  arbitrarie, cioè non necessariamente legate alle componenti tangenziali di un possibile campo elettromagnetico in  $V$ . Inoltre, sempre per  $\mathbf{J}_S$  e  $\mathbf{M}_S$  arbitrarie, non è difficile mostrare che gli operatori  $L_E$  e  $L_H$  forniscono soluzioni delle Equazioni di Maxwell in  $V$  e in  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{V}$  che soddisfano le condizioni di radiazione all'infinito; tuttavia in generale il campo in  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{V}$  non sarà identicamente nullo, come invece risulta dalle (2.1.9), (2.1.10).



## 3.1 Scattering da oggetto conduttore

Per mostrare come possono essere derivate equazioni integrali al contorno a partire dalle rappresentazioni integrali discusse nella sezione precedente, si consideri la configurazione in Fig. 3.1, nella quale sono presenti due regioni occupate da mezzi diversi: la regione  $V_1$ , limitata e occupata da un mezzo 1 conduttore ideale (PEC), e la regione  $V_2$ , illimitata e occupata da un mezzo 2 lineare, stazionario, isotropo e omogeneo; si suppone che all'interno di  $V_2$  siano presenti le correnti impresse  $\mathbf{J}^i$ ,  $\mathbf{M}^i$ . Si tratta di un semplice problema di scattering da conduttore: esso consiste nel calcolare il campo  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  che soddisfa in  $V_2$  le Equazioni di Maxwell e le relazioni costitutive del mezzo 2, su  $S = \partial V_1$  soddisfa la condizione al contorno  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$  e all'infinito soddisfa la condizione di radiazione di Sommerfeld:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + jkr_0 \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] = \mathbf{0} \quad (3.1.1)$$

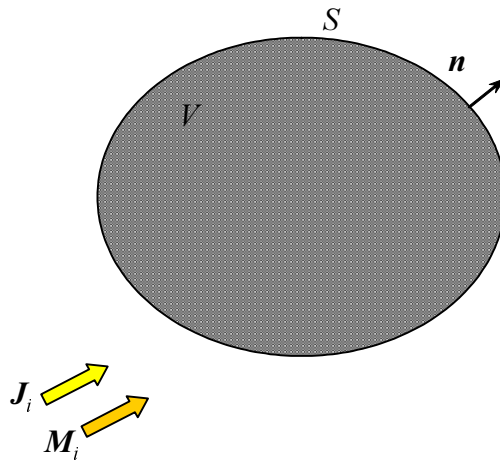


Figura 3.1: Scattering da oggetto PEC.

Il campo elettromagnetico in  $V_1$  è identicamente nullo, essendo tale regione occupata da un PEC.

Le correnti impresse generano un campo incidente  $\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i$  che, al solito, è definito come il campo irradiato dalle  $\mathbf{J}^i, \mathbf{M}^i$  nello spazio libero occupato dal mezzo 2 (dunque in assenza del conduttore in  $V_1$ ). Il campo incidente può essere in particolare un'onda piana, caso che si ottiene portando le correnti impresse all'infinito.

La prima osservazione fondamentale è che il problema elettromagnetico così posto, in forma differenziale, ammette un'unica soluzione ([4]). Infatti, se esso ammettesse per assurdo due soluzioni distinte  $\mathbf{E}', \mathbf{H}'$  e  $\mathbf{E}'', \mathbf{H}''$ , il campo differenza  $\mathbf{E}_d = \mathbf{E}' - \mathbf{E}'', \mathbf{H}_d = \mathbf{H}' - \mathbf{H}''$  sarebbe soluzione delle Equazioni di Maxwell omogenee in  $V_2$  (cioè in assenza di correnti impresse), soddisferebbe su  $S$  la  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_d = \mathbf{0}$  e all'infinito la condizione di radiazione di Sommerfeld. Si consideri allora, insieme al campo differenza  $\mathbf{E}_d, \mathbf{H}_d$ , il campo  $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$  irradiato in  $V_2$  da un'arbitraria corrente elettrica impressa  $\tilde{\mathbf{J}}^i$  in presenza della regione PEC  $V_1$ , e applichiamo a questi due campi il Teorema di Reciprocità nel volume  $V_R$  delimitato da  $S$  e dalla superficie sferica  $S_R$  di una sfera di raggio  $R$  sufficientemente grande da contenere  $V_1$ :

$$\int_{S \cup S_R} (\mathbf{E}_d \times \tilde{\mathbf{H}} - \tilde{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}_d) \cdot \mathbf{n} \, dS = - \int_{V_R} \tilde{\mathbf{J}}^i \cdot \mathbf{E}_d \, dS \quad (3.1.2)$$

L'integrale di superficie su  $S$  è nullo in virtù della condizione al contorno sul PEC, mentre l'integrale su  $S_R$  tende a zero per  $R \rightarrow +\infty$  in virtù della condizione di radiazione di Sommerfeld. Pertanto risulta

$$\int_{V_R} \tilde{\mathbf{J}}^i \cdot \mathbf{E}_d \, dS = 0 \quad (3.1.3)$$

e per l'arbitrarietà della corrente impressa  $\tilde{\mathbf{J}}$  si deduce che deve essere  $\mathbf{E}_d = \mathbf{0}$  identicamente in  $V_2$  (si osservi che  $V_R \rightarrow V_2$  per  $R \rightarrow +\infty$ ). Da ciò poi discende che è anche  $\mathbf{H}_d = \mathbf{0}$  in  $V_2$  e quindi risulta  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}'', \mathbf{H}' = \mathbf{H}''$ . Ciò contraddice la supposta esistenza di due soluzioni distinte del problema. Quanto appena dimostrato generalizza al caso di regione illimitata il Teorema di Unicità per la soluzione del problema elettromagnetico in regioni limitate, noto dal corso di Campi Elettromagnetici I, e verrà chiamato nel seguito *Teorema Esterno di Unicità*.

Si ammetta ora di poter rappresentare il campo in  $V_2$  per mezzo degli operatori integrali al contorno  $L_E, L_H$  definiti dalle Eq. (2.1.11), (2.1.12), i quali agiscono sulle correnti  $\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S$  definite sulla superficie  $S$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = L_E [\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \quad (3.1.4)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = L_H [\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] + \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) \quad (3.1.5)$$

Per quanto visto nella sezione precedente, è lecito assumere che valga una rappresentazione del tipo

(3.1.4), (3.1.5); infatti si è mostrato che, ponendo

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_S(\mathbf{r}) &= \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{M}_S(\mathbf{r}) &= -\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

effettivamente le (3.1.4), (3.1.5) valgono in  $V_2$ . Si è anche mostrato, d'altra parte, che per una scelta arbitraria delle  $\mathbf{J}_S$ ,  $\mathbf{M}_S$  il campo  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  definito dalle (3.1.4), (3.1.5) è soluzione delle Equazioni di Maxwell in  $V_2$ .

Una prima classificazione delle equazioni integrali al contorno può essere fatta allora in base alla scelta delle incognite  $\mathbf{J}_S$ ,  $\mathbf{M}_S$ : seguendo la terminologia di Harrington [14], se si ammette che valgano le (3.1.6) si hanno le formulazioni di tipo 'field' delle BIE; rinunciando alle (3.1.6) si hanno le formulazioni di tipo 'source'. Si comincerà con l'esaminare le prime.

### 3.1.1 Scattering da conduttore: formulazioni 'field'

Assumendo che valgano le (3.1.6), essendo  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  su  $S$  si ha intanto  $\mathbf{M}_S = \mathbf{0}$ , dunque rimane l'unica incognita  $\mathbf{J}_S$  e le (3.1.4), (3.1.5) diventano:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = L_E[\mathbf{J}_S, \mathbf{0}] + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \quad (3.1.7)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = L_H[\mathbf{J}_S, \mathbf{0}] + \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) \quad (3.1.8)$$

Si consideri la rappresentazione (3.1.7) per il campo elettrico e se ne faccia il limite per  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ , con  $\mathbf{r}_0 \in S$ , e  $\mathbf{r}$  in  $V_2$  (il limite cioè è fatto dalla parte positiva di  $S$ ). Si è visto che si ha:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) + L_E^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{0}] + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_0) \quad (3.1.9)$$

cioè

$$\frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = L_E^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{0}] + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_0) \quad (3.1.10)$$

Moltiplicando vettorialmente a sinistra per  $\mathbf{n}(\mathbf{r}_0)$  si ottiene:

$$\frac{1}{2}\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_E^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{0}] + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_0) \quad (3.1.11)$$

che, tenendo conto della  $\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$ , si riduce alla

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_E^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{0}] = -\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_0) \quad (3.1.12)$$

Questa è l'equazione integrale di campo elettrico, meglio nota come Electric Field Integral Equation (EFIE). E' interessante osservare che alla stessa equazione si può giungere partendo ancora dalla

(3.1.7), ma facendone il limite dalla parte negativa di  $S$ . Infatti, poiché in  $V_1$  si ha identicamente  $L_E[\mathbf{J}_S, \mathbf{0}] = \mathbf{0}$ , risulta

$$\mathbf{0} = -\frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) + L_E^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{0}] + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_0) \quad (3.1.13)$$

che coincide con la (3.1.10).

Partendo dalla rappresentazione integrale (3.1.8) per il campo magnetico e facendone il limite per  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$  si ottiene:

$$\frac{1}{2}\mathbf{H}(\mathbf{r}_0) = L_H^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{0}] + \mathbf{H}^i(\mathbf{r}_0) \quad (3.1.14)$$

(anche in questo caso il limite si può fare indifferentemente dalla parte positiva o negativa di  $S$ ) da cui, moltiplicando vettorialmente a sinistra per  $\mathbf{n}(\mathbf{r}_0)$  e tenendo conto che  $\mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0) = \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}_0)$  si ottiene:

$$\frac{1}{2}\mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0) - \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_H^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{0}] = \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}_0) \quad (3.1.15)$$

Questa è l'equazione integrale di campo magnetico, meglio nota come Magnetic Field Integral Equation (MFIE).

Il sistema delle due equazioni EFIE e MFIE ammette come soluzione unica la  $\mathbf{J}_S = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$  dove  $\mathbf{H}$  è la soluzione (unica, per quanto visto prima) del problema elettromagnetico considerato. Che tale  $\mathbf{J}_S$  sia soluzione del sistema discende dal fatto che le EFIE e MFIE sono conseguenze delle Equazioni di Maxwell e delle condizioni al contorno. L'unicità della soluzione può essere dimostrata facendo vedere che il sistema omogeneo associato alle EFIE (3.1.12) e MFIE (3.1.15):

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_E^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{0}] = \mathbf{0} \quad (3.1.16)$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0) - \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_H^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{0}] = \mathbf{0} \quad (3.1.17)$$

ha solo la soluzione banale  $\mathbf{J}_S = \mathbf{0}$  ([12]).

Infatti, siano  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  e  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  i campi irradiati rispettivamente in  $V_1$  e  $V_2$  dalla  $\mathbf{J}_S$  posta nello spazio libero occupato dal mezzo 2. La EFIE omogenea (3.1.16) equivale a  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$  su  $S$ , e poiché  $\mathbf{M}_S = \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$  su  $S$ , risulta anche  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$  su  $S$ . Allora il campo  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  risulta identicamente nullo in  $V_2$  per il Teorema Esterno di Unicità. La MFIE omogenea (3.1.17) equivale invece a  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$  su  $S$ . Poiché vale la  $\mathbf{J}_S = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)$  su  $S$ , si deduce in definitiva che  $\mathbf{J}_S = \mathbf{0}$ .

Il sistema EFIE+MFIE ammette dunque soluzione unica, ma è sovradeterminato, perché è costituito da due equazioni in una sola funzione incognita. Per avere un sistema determinato è necessario risolvere una sola delle due equazioni, oppure una loro combinazione lineare.

E' importante osservare a questo punto che, avendo a che fare con una sola equazione integrale, questa potrebbe non avere più soluzione unica. Si può notare subito che questo è proprio il caso delle

EFIE e MFIE, considerate singolarmente ([1], [4], [12]). Infatti, la EFIE omogenea ammette una soluzione  $\mathbf{J}_S$  che, come visto prima, irradia nella regione  $V_2$  (nello spazio libero occupato dal mezzo 2) un campo  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  identicamente nullo. Tuttavia, per il campo  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  irradiato nella regione  $V_1$  (questa volta occupata anch'essa dal mezzo 2) non vale più la  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$  su  $S$ , perché non si ha più la MFIE omogenea. E' ancora vero, tuttavia, che  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$  su  $S$ , dalla  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$  su  $S$  e  $\mathbf{M}_S = \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$ . Dunque il campo  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  soddisfa in  $V_1$  le Equazioni di Maxwell e le relazioni costitutive del mezzo 2, e ha campo elettrico tangenziale nullo su  $S$ : si sa dalla teoria elettromagnetica che questo deve essere un modo di risonanza della cavità a pareti PEC costituita dalla regione  $V_1$  occupata dal mezzo 2. E' noto che un modo di risonanza può esistere solo a una delle frequenze di risonanza della cavità, che sono un'infinità numerabile superiormente illimitata.

Se la frequenza delle correnti impresse non coincide con alcuna di queste frequenze di risonanza, il campo  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  deve essere identicamente nullo in  $V_1$ , e allora dalle  $\mathbf{J}_S = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)$ ,  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{0}$  su  $S$  segue che  $\mathbf{J}_S = \mathbf{0}$ , cioè la soluzione della EFIE (3.1.16) è unica. Se invece ci si trova a una frequenza di risonanza della cavità, non sarà più vero che  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$  su  $S$ , dunque  $\mathbf{J}_S \neq \mathbf{0}$ , e la EFIE non ammette più soluzione unica. La soluzione della EFIE non omogenea (3.1.12) sarà costituita allora dalla somma della soluzione vera e di una qualunque soluzione della EFIE omogenea associata.

A una conclusione simile si giunge per la MFIE, con un ragionamento un po' più complicato nel quale entrano in gioco i modi di risonanza della cavità formata dalla regione  $V_1$  occupata dal mezzo 2 con pareti magnetiche ideali (Perfect Magnetic Conductor, PMC). In questo caso infatti la MFIE omogenea implica che sia  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$  su  $S$ , ma non c'è più la EFIE omogenea a garantire che  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$  su  $S$ . Potrebbe dunque esistere un modo di risonanza  $\mathbf{E}', \mathbf{H}'$  della cavità a pareti PMC sopra descritta, per il quale è appunto  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}' = \mathbf{0}$  su  $S$ , ma  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 \neq \mathbf{0}$  su  $S$  (adesso  $\mathbf{J}'_S = \mathbf{0}$ , ma  $\mathbf{M}'_S \neq \mathbf{0}$  sul PMC).

Ci si propone ora di vedere che legame c'è fra il campo  $\mathbf{E}', \mathbf{H}'$  e la soluzione della MFIE omogenea. Si consideri un campo  $\mathbf{E}'', \mathbf{H}''$  in  $V_2$  tale che  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}'' = \mathbf{n} \times \mathbf{E}'$  su  $S$ . Si può definire  $\mathbf{J}''_S = \mathbf{n} \times \mathbf{H}''$  e mostrare che  $\mathbf{J}''_S$  soddisfa la MFIE omogenea. Infatti, le correnti  $\mathbf{J}''_S$  irradiano nello spazio libero occupato dal mezzo 2 un campo pari a  $\mathbf{E}'', \mathbf{H}''$  in virtù delle rappresentazioni integrali al contorno (3.1.7), (3.1.8) in  $V_2$ . Il campo elettrico irradiato in  $V_1$  è ivi soluzione delle equazioni di Maxwell con il mezzo 2 e ha componente tangenziale continua su  $S$ : esso deve dunque coincidere con  $\mathbf{E}'$  e allora il campo magnetico relativo sarà  $\mathbf{H}'$ , per il quale avevamo supposto che valesse la  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}' = \mathbf{0}$  su  $S$ . Esprimendo il campo magnetico per mezzo della  $\mathbf{J}''_S$  in quest'ultima equazione, si ottiene la MFIE omogenea.

Si vede dunque che la MFIE non ammette soluzione unica alle frequenze di risonanza della cavità

$V_1$  con pareti PMC occupata dal mezzo 2. E' importante osservare che tali frequenze coincidono con le frequenze di risonanza della cavità con pareti PEC occupata dal mezzo 2; pertanto la MFIE non ha soluzione unica se e solo se la EFIE non ha soluzione unica (la coincidenza delle frequenze di risonanza dei due tipi di cavità discende facilmente dal Teorema di Dualità). E' anche importante osservare che la  $\mathbf{J}_S$ , soluzione della EFIE omogenea a una data frequenza di risonanza, è diversa dalla  $\tilde{\mathbf{J}}_S$  soluzione della MFIE omogenea alla stessa frequenza, essendo le due correnti, come visto, legate a modi di risonanza distinti. Questo lascia supporre che combinando le due equazioni con opportuni coefficienti si possa ottenere un'equazione che ammette soluzione unica a tutte le frequenze.

Si consideri dunque l'equazione:

$$EFIE + \alpha \mathbf{n} \times MFIE \quad (3.1.18)$$

nota come Combined Field Integral Equation (CFIE) ([12]). Se il coefficiente  $\alpha \in \mathbb{C}$  è tale che  $\text{Re}\{\alpha\} > 0$ , la CFIE ammette sempre soluzione unica. Infatti, sia  $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$  il campo irradiato nello spazio libero occupato dal mezzo 2 dalla  $\tilde{\mathbf{J}}_S$  soluzione della CFIE omogenea. Per tale campo la CFIE omogenea esprime la condizione

$$\tilde{\mathbf{E}} + \alpha \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}} = 0 \quad (3.1.19)$$

sulla faccia interna  $S^-$  di  $S$ . Si applichi allora il Teorema di Poynting al volume  $V_1$  limitato dalla  $S^-$ : la potenza reale uscente da tale volume è:

$$P_{OUT} = \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \oint_{S^-} \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* \cdot \mathbf{n} \, dS \right] \quad (3.1.20)$$

e deve essere  $P_{OUT} \leq 0$  perché in  $V_1$  non ci sono correnti impresse. Sviluppando il secondo membro della (3.1.20):

$$\begin{aligned} P_{OUT} &= \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \oint_{S^-} \left( -\alpha \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}} \right) \times \tilde{\mathbf{H}}^* \cdot \mathbf{n} \, dS \right] = \\ &= \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \oint_{S^-} -\alpha \left( \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}} \right) \cdot \left( \tilde{\mathbf{H}}^* \times \mathbf{n} \right) \, dS \right] = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}\{\alpha\} \oint_{S^-} \left| \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}} \right|^2 \, dS \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Se  $\text{Re}\{\alpha\} > 0$ , risulta

$$\oint_{S^-} \left| \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}} \right|^2 \, dS \leq 0 \quad (3.1.22)$$

e questo implica che  $\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$  su  $S^-$ . La (3.1.1) implica allora che sia anche  $\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$  su  $S^-$ . Tuttavia,  $\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}|_{S^-} = \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}|_{S^+}$ , poiché  $\mathbf{M}_S = \mathbf{0}$ . Dunque  $\tilde{\mathbf{E}}$  soddisfa in  $V_2$  le Equazioni di Maxwell omogenee, ha componente tangenziale nulla su  $S$  e soddisfa la condizione di radiazione di Sommerfeld all'infinito: si deduce dal Teorema Esterno di Unicità che  $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$  sono identicamente nulli in  $V_2$ , e in particolare  $\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}|_{S^+} = \mathbf{0}$ . Quest'ultima, con la  $\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}|_{S^-} = \mathbf{0}$  trovata prima e per la  $\tilde{\mathbf{J}}_S = \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}|_{S^+} - \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}|_{S^-}$ , porta a concludere che  $\tilde{\mathbf{J}}_S = \mathbf{0}$ , cioè la soluzione della CFIE è unica.

### 3.1.2 Scattering da conduttore: formulazioni ‘source’

Si consideri ora l’altra famiglia di BIE, in cui le correnti superficiali  $\mathbf{J}_S$ ,  $\mathbf{M}_S$  nelle (2.1.11), (2.1.12) non sono legate al campo in  $V_2$  dalle (3.1.6). Come già osservato, scegliendo arbitrariamente le  $\mathbf{J}_S$ ,  $\mathbf{M}_S$ , si ottengono, mediante le (2.1.11) e (2.1.12), campi  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  che soddisfano le equazioni di Maxwell nella regione  $V_2$  occupata dal mezzo 2 e le condizioni di radiazione all’infinito. Per avere la soluzione del problema di scattering rimane solo da imporre la condizione al contorno  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  su  $S^+$ : facendo allora il limite della (2.1.11) per  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$  (stavolta è importante che il limite sia fatto con  $\mathbf{r} \in V_2$ ) e moltiplicando vettorialmente a sinistra per  $\mathbf{n}(\mathbf{r}_0)$  si ha:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \{L_E[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] + \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r})\} = \mathbf{0} \quad (3.1.23)$$

da cui

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \left\{ L_E^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] + \frac{1}{2} \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{M}_S(\mathbf{r}_0) + \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) \right\} = \mathbf{0} \quad (3.1.24)$$

ossia

$$-\frac{1}{2} \mathbf{M}_S(\mathbf{r}_0) + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_E^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] = -\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}^{inc} \quad (3.1.25)$$

Va notato che ora non si può dedurre dalla rappresentazione integrale (3.1.5) per il campo magnetico un’equazione integrale, perché per il campo magnetico vale la  $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{Sf}$  sulla superficie del PEC, dove  $\mathbf{J}_{Sf}$  è la vera corrente superficiale che esiste sulla superficie del PEC, che non è nota. La  $\mathbf{J}_{Sf}$  può essere determinata a posteriori dopo aver risolto l’equazione (3.1.25), avendo cioè determinato  $\mathbf{J}_S$  e  $\mathbf{M}_S$ , da cui con le (3.1.4) e (3.1.5) si determinano i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  in  $V_2$  e quindi è possibile calcolare la  $\mathbf{J}_{Sf} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$  su  $S^+$ . Nel caso delle formulazioni “source” dunque si ha una sola equazione integrale, la (3.1.25). Tuttavia, essa è un’equazione sottodeterminata, perché vi figurano due funzioni incognite ( $\mathbf{J}_S$  e  $\mathbf{M}_S$ ). Mentre nel caso delle formulazioni “field” si erano ottenute due equazioni integrali in una sola funzione incognita, e si è pertanto dovuto ridurre il numero delle equazioni da due a uno, nel caso delle formulazioni “source” si ha una sola equazioni e due funzioni incognite, quindi è necessario ridurre da due a uno il numero delle incognite. Questo si può fare imponendo che una delle due incognite  $\mathbf{J}_S$ ,  $\mathbf{M}_S$  sia nulla, oppure imponendo che esse siano legate da qualche relazione funzionale, per semplicità di tipo lineare.

Assumendo ad esempio che sia  $\mathbf{J}_S = \mathbf{0}$  si ottiene:

$$-\frac{1}{2} \mathbf{M}_S(\mathbf{r}_0) + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_E^0[\mathbf{0}, \mathbf{M}_S] = -\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}^{inc} \quad (3.1.26)$$

che è nota come Magnetic Current Integral Equation (MCIE). Assumendo  $\mathbf{M}_S = \mathbf{0}$  si ottiene invece:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_E^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{0}] = -\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}^{inc} \quad (3.1.27)$$

che coincide con la EFIE già vista (e che in questo contesto dovrebbe chiamarsi Electric Current Integral Equation, ECIE).

Infine, ponendo  $\mathbf{M}_S = \alpha \mathbf{n} \times \mathbf{J}_S$  si ottiene:

$$-\frac{1}{2} \alpha \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0) + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_E^0 [\mathbf{J}_S, \alpha \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0)] = -\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}^{inc} \quad (3.1.28)$$

nota come Combined Source Integral Equation (CSIE).

Circa l'unicità della soluzione, per le MCIE e CSIE valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per le EFIE, MFIE e CFIE. Si trova in particolare che la MCIE non ha soluzione unica alle frequenze di risonanza della cavità  $V_1$  occupata del mezzo 2 con pareti PMC o PEC (come per le EFIE e MFIE), mentre la CSIE ha soluzione unica a tutte le frequenze se  $\Re(\alpha) > 0$  ([13]).

### 3.2 Scattering da oggetto dielettrico

Si consideri ora un problema di scattering da oggetto dielettrico: la situazione è schematizzata in Fig. 2, dove la regione  $V_1$  è occupata dal mezzo 1 lineare, stazionario, isotropo e omogeneo con parametri  $\varepsilon_1$  e  $\mu_1$ . In questo caso il problema elettromagnetico consiste nel calcolare il campo nella regione  $V_1$  che soddisfa le Equazioni di Maxwell e le relazioni costitutive del mezzo 1 e il campo nella regione  $V_2$  che soddisfa le Equazioni di Maxwell e le relazioni costitutive del mezzo 2, in modo che valga in  $V_2$  all'infinito la condizione di radiazione di Sommerfeld e all'interfaccia  $S = \partial V_1$  valgano le condizioni di continuità delle componenti tangenziali di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ .

Come nel caso dello scattering da PEC, si dimostra innanzitutto che la soluzione del problema elettromagnetico posto è unica, con un ragionamento analogo basato sul Teorema di Reciprocità. Il punto di partenza delle formulazioni “field” e “source” delle BIE per lo scattering da dielettrico è costituito dalle seguenti rappresentazioni integrali al contorno per i campi nelle regioni  $V_1$  e  $V_2$ :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = L_{E1} [\mathbf{J}_{S1}, \mathbf{M}_{S1}] \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = L_{H1} [\mathbf{J}_{S1}, \mathbf{M}_{S1}] \end{cases}, \quad \mathbf{r} \in V_1 \quad (3.2.1)$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = L_{E2} [\mathbf{J}_{S2}, \mathbf{M}_{S2}] + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = L_{H2} [\mathbf{J}_{S2}, \mathbf{M}_{S2}] + \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) \end{cases}, \quad \mathbf{r} \in V_2 \quad (3.2.2)$$

Nelle (3.2.1) figurano gli operatori  $L_{E1}$  e  $L_{H1}$  nella cui definizione intervengono i parametri costitutivi  $\varepsilon_1$  e  $\mu_1$  del mezzo 1, mentre nelle (3.2.2) figurano gli operatori  $L_{E2}$  e  $L_{H2}$  nella cui definizione intervengono i parametri costitutivi  $\varepsilon_2$  e  $\mu_2$  del mezzo 2. Inoltre, avendo supposto che siano presenti correnti impresse solo in  $V_2$ , il campo incidente  $\mathbf{E}^{inc}$ ,  $\mathbf{H}^{inc}$  figura solo nelle (3.2.2), ed è al solito definito come il campo irradiato dalle  $\mathbf{J}^i$ ,  $\mathbf{M}^i$  nello spazio libero occupato dal mezzo 2. Si osservi

infine che nella rappresentazione del campo in  $V_1$  mediante le (3.2.1) intervengono le correnti superficiali  $\mathbf{J}_{S1}$ ,  $\mathbf{M}_{S1}$ , mentre nella rappresentazione del campo in  $V_2$  mediante le (3.2.1) intervengono le correnti superficiali  $\mathbf{J}_{S2}$ ,  $\mathbf{M}_{S2}$ , generalmente diverse dalle precedenti. Anche nel caso dello scattering da oggetto dielettrico la scelta delle funzioni incognite in relazione ai campi consente di classificare le equazioni integrali al contorno nelle classi “field” e “source”, come verrà illustrato nel seguito.

### 3.2.1 Scattering da dielettrico: formulazioni “field”

Per ottenere le formulazioni “field” si assume che le correnti superficiali incognite siano legate ai campi dalle relazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{S1} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{M}_{S1} = -\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{J}_{S2} = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{M}_{S2} = -\mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_2 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

dove  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$  sono le normali alla  $S$  interne alle regioni  $V_1$  e  $V_2$ , rispettivamente.

Poiché  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ , posto  $\mathbf{n} \doteq \mathbf{n}_2$  e valendosi della continuità delle componenti tangenziali dei campi su  $S$  si ottiene

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{S2} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = -\mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1 = -\mathbf{J}_{S1} \\ \mathbf{M}_{S2} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1 = -\mathbf{M}_{S1} \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Posto allora  $\mathbf{J}_S \doteq \mathbf{J}_{S2}$  e  $\mathbf{M}_S \doteq \mathbf{M}_{S2}$ , le (3.2.1) e (3.2.2) si riscrivono:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = L_{E1}[-\mathbf{J}_S, -\mathbf{M}_S] = -L_{E1}[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = L_{H1}[-\mathbf{J}_S, -\mathbf{M}_S] = -L_{H1}[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] \end{cases}, \quad \mathbf{r} \in V_1 \quad (3.2.5)$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = L_{E2}[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] + \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = L_{H2}[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] + \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) \end{cases}, \quad \mathbf{r} \in V_2 \quad (3.2.6)$$

Facendo tendere il punto  $\mathbf{r}$  ad un punto  $\mathbf{r}_0 \in S$ , dalle (3.2.5) per il volume  $V_1$  si ottiene, moltiplicando vettorialmente a sinistra per  $\mathbf{n}(\mathbf{r}_0)$ :

$$-\frac{1}{2}\mathbf{M}_S(\mathbf{r}_0) + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_{E1}^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] = \mathbf{0} \quad (3.2.7)$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0) + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_{H1}^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] = \mathbf{0} \quad (3.2.8)$$

Queste sono rispettivamente le EFIE e MFIE per il volume  $V_1$ , che verranno indicate con  $EFIE_1$  e  $MFIE_1$ .

Analogamente, dalle (3.2.6) per il volume  $V_2$  si ottiene:

$$\frac{1}{2}\mathbf{M}_S(\mathbf{r}_0) + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_{E2}^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] = -\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}_0) \quad (3.2.9)$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0) + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_{H2}^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] = -\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}_0) \quad (3.2.10)$$

che sono le  $EFIE_2$  e  $MFIE_2$ .

Il sistema costituito dalle quattro equazioni  $EFIE_1$ ,  $MFIE_1$ ,  $EFIE_2$  e  $MFIE_2$  ammette come soluzione unica la coppia  $\mathbf{J}_S$ ,  $\mathbf{M}_S$  legata agli effettivi campi tangenziali su  $S$ ; la dimostrazione dell'unicità procede per assurdo come nel caso dello scattering da PEC.

Nelle quattro equazioni ottenute figurano solo due funzioni incognite ( $\mathbf{J}_S$  e  $\mathbf{M}_S$ ); per ottenere un sistema determinato è necessario ridurre a due il numero delle equazioni. Ciò può essere fatto ad esempio scegliendo semplicemente due delle quattro BIE (3.2.7), (3.2.8), (3.2.9) e (3.2.10); tale scelta però non può essere fatta in modo del tutto arbitrario. Infatti, scegliendo ad esempio la coppia  $EFIE_1$ ,  $MFIE_1$  (oppure la coppia  $EFIE_2$ ,  $MFIE_2$ ) non si ottiene un sistema valido, perché non si utilizza alcuna informazione sulla regione  $V_2$  (o  $V_1$ ). Una scelta possibile è costituita dalla coppia  $EFIE_1$ ,  $EFIE_2$ :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\mathbf{M}_S(\mathbf{r}_0) + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_{E1}^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] = \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}\mathbf{M}_S(\mathbf{r}_0) + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_{E2}^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] = -\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}_0) \end{cases} \quad (3.2.11)$$

che è detta formulazione  $EFIE$  del problema di scattering da oggetto dielettrico. Analogamente, si possono scegliere le due  $MFIE_1$ ,  $MFIE_2$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0) + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_{H1}^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] = \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0) + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times L_{H2}^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] = -\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}_0) \end{cases} \quad (3.2.12)$$

che costituiscono la formulazione  $MFIE$  del medesimo problema.

Ambedue i sistemi (3.2.11) e (3.2.12) non hanno soluzione unica alle frequenze di risonanza della cavità  $V_1$  occupata dal mezzo 2 (con pareti PEC o PMC, indifferentemente). La dimostrazione di ciò è analoga a quella illustrata per le  $EFIE$  e  $MFIE$  nel caso di scattering da PEC.

Allo scopo di ottenere sistemi di BIE privi di soluzioni spurie, è possibile, come nel caso dell'oggetto PEC, effettuare combinazioni lineari delle equazioni fondamentali con opportuni coefficienti complessi.

E' possibile, ad esempio, combinare le due  $EFIE$  e  $MFIE$  per il volume esterno, e le due  $EFIE$  e  $MFIE$  per il volume interno:

$$\begin{aligned} EFIE_1 + \alpha \mathbf{n} \times MFIE_1 \\ EFIE_2 + \beta \mathbf{n} \times MFIE_2 \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

La formulazione risultante, denominata  $CFIE$ , risulta priva di soluzioni spurie se  $\Re(\alpha) > 0$  e  $\Re(\beta) > 0$  ([14], [15], [16]).

In alternativa, si possono combinare fra loro le  $EFIE_1$  e  $EFIE_2$ , e anche le  $MFIE_1$  e  $MFIE_2$ :

$$\begin{aligned} EFIE_1 + \alpha EFIE_2 \\ MFIE_1 + \beta MFIE_2 \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Il sistema risultante è privo di soluzioni spurie se  $\Re(\alpha\beta^*) \geq 0$  ([14], [16]). A questa classe di equazioni appartiene la formulazione nota in letteratura come PMCHW (acronimo di Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu), che si ottiene scegliendo  $\alpha = \beta = 1$ , e la formulazione di Müller, che si ottiene scegliendo  $\alpha = -\varepsilon_2/\varepsilon_1$ ,  $\beta = -\mu_2/\mu_1$ . Quest'ultima offre vantaggi computazionali grazie alla scelta dei coefficienti della combinazione lineare delle equazioni fondamentali, legata ai parametri costitutivi delle due regioni coinvolte, che determina la cancellazione del termine più singolare nel kernel delle equazioni integrali ([1], [3]).

### 3.2.2 Scattering da dielettrico: formulazioni “source”

Nelle formulazioni “source” delle BIE per oggetti dielettrici le correnti superficiali  $\mathbf{J}_{S1}$ ,  $\mathbf{M}_{S1}$  e  $\mathbf{J}_{S2}$ ,  $\mathbf{M}_{S2}$  nelle (3.2.1), (3.2.2) non sono legate al campo in  $V_1$  e  $V_2$  dalle (3.2.3). Come già osservato, scegliendo arbitrariamente le correnti superficiali elettriche e magnetiche, si ottengono, mediante le (3.2.1) e (3.2.2), campi  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  che soddisfano le equazioni di Maxwell nelle regioni  $V_1$  (occupata dal mezzo 1) e  $V_2$  (occupata dal mezzo 2), nonché le condizioni di radiazione all'infinito. Restano dunque da imporre le condizioni di continuità delle componenti tangenziali dei campi elettrico e magnetico sulla superficie di separazione delle due regioni  $V_1$  e  $V_2$ .

Considerando il campo elettrico, si avrà:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \left\{ \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0, \mathbf{r} \in V_1} L_{E1} [\mathbf{J}_{S1}, \mathbf{M}_{S1}] - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0, \mathbf{r} \in V_2} [L_{E2} [\mathbf{J}_{S2}, \mathbf{M}_{S2}] + \mathbf{E}^i(\mathbf{r})] \right\} = \mathbf{0} \quad (3.2.15)$$

da cui

$$\frac{1}{2} [\mathbf{M}_{S1}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{M}_{S2}(\mathbf{r}_0)] + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \{L_{E1}^0 [\mathbf{J}_{S1}, \mathbf{M}_{S1}] - L_{E2}^0 [\mathbf{J}_{S2}, \mathbf{M}_{S2}]\} = \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}_0) \quad (3.2.16)$$

Dualmente, considerando il campo magnetico si otterrà:

$$-\frac{1}{2} [\mathbf{J}_{S1}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{J}_{S2}(\mathbf{r}_0)] + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \{L_{H1}^0 [\mathbf{J}_{S1}, \mathbf{M}_{S1}] - L_{H2}^0 [\mathbf{J}_{S2}, \mathbf{M}_{S2}]\} = \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}_0) \quad (3.2.17)$$

Le due equazioni integrali 3.2.16 e 3.2.17 contengono quattro correnti superficiali incognite: la situazione è rovesciata rispetto al caso delle formulazioni “field”, dove si avevano quattro equazioni fondamentali e due correnti superficiali incognite. In questo caso, al fine di ottenere un sistema determinato, è necessario specificare ulteriori vincoli per le correnti incognite. Procedendo in modo duale

rispetto alle formulazioni “field”, si esprimeranno due delle correnti incognite come combinazione lineare delle altre due correnti. Anche in questo caso è necessario accertarsi che il sistema di due equazioni così ottenuto sia privo di soluzioni spurie.

Scegliendo ad esempio di porre  $M_{S1} = M_{S2} = \mathbf{0}$ , cioè rappresentando il campo elettromagnetico in ciascuna delle due regioni in termini delle sole correnti superficiali elettriche, si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \{L_{E1}^0[\mathbf{J}_{S1}, \mathbf{0}] - L_{E2}^0[\mathbf{J}_{S2}, \mathbf{0}]\} &= \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}_0) \\ -\frac{1}{2}[\mathbf{J}_{S1}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{J}_{S2}(\mathbf{r}_0)] + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \{L_{H1}^0[\mathbf{J}_{S1}, \mathbf{0}] - L_{H2}^0[\mathbf{J}_{S2}, \mathbf{0}]\} &= \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

note come Electric Current Integral Equations (*ECIE*).

Dualmente, ponendo  $\mathbf{J}_{S1} = \mathbf{J}_{S2} = \mathbf{0}$ , cioè rappresentando il campo elettromagnetico in ciascuna delle due regioni in termini delle sole correnti superficiali magnetiche, si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\mathbf{M}_{S1}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{M}_{S2}(\mathbf{r}_0)] + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \{L_{E1}^0[\mathbf{0}, \mathbf{M}_{S1}] - L_{E2}^0[\mathbf{0}, \mathbf{M}_{S2}]\} &= \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}_0) \\ \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \{L_{H1}^0[\mathbf{0}, \mathbf{M}_{S1}] - L_{H2}^0[\mathbf{0}, \mathbf{M}_{S2}]\} &= \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

note come Magnetic Current Integral Equations (*MCIE*).

Ambedue i sistemi 3.2.18, 3.2.19 ammettono soluzioni spurie alle frequenze di risonanza della cavità  $V_1$  occupata dal mezzo 2 ([14]).

Ponendo invece  $\mathbf{J}_{S2} = -\alpha\mathbf{J}_{S1} = \mathbf{J}$ ,  $\mathbf{M}_{S2} = -\alpha\mathbf{M}_{S1} = \mathbf{M}$ , cioè combinando fra loro le correnti elettriche e le correnti magnetiche, si ottiene il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - \beta)\mathbf{M}_S(\mathbf{r}_0) + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \{L_{E1}^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] - \alpha\beta L_{E2}^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_{S2}]\} &= \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}_0) \\ -\frac{1}{2}(1 - \alpha)\mathbf{J}_S(\mathbf{r}_0) + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \{L_{H1}^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S] - \alpha\beta L_{H2}^0[\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_{S2}]\} &= \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

dette Combined Current Integral Equations (*CCIE*), che risultano prive di soluzioni spurie se  $\Re(\alpha\beta) \geq 0$  ([14]).

Ponendo  $\mathbf{M}_{S1} = \alpha\mathbf{n} \times \mathbf{J}_{S1}$ ,  $\mathbf{M}_{S2} = \beta\mathbf{n} \times \mathbf{J}_{S2}$ , cioè esprimendo le correnti magnetiche mediante le correnti elettriche, si ottiene il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times [\alpha\mathbf{J}_{S1}(\mathbf{r}_0) + \beta\mathbf{J}_{S2}(\mathbf{r}_0)] + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \{L_{E1}^0[\mathbf{J}_{1S}, \alpha\mathbf{n} \times \mathbf{J}_{S1}] + \\ -\alpha\beta L_{E2}^0[\mathbf{J}_S, \beta\mathbf{n} \times \mathbf{J}_{S2}]\} &= \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}_0) \\ -\frac{1}{2}[\mathbf{J}_{S1}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{J}_{S2}(\mathbf{r}_0)] + \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \{L_{H1}^0[\mathbf{J}_{1S}, \alpha\mathbf{n} \times \mathbf{J}_{S1}] + \\ -\alpha\beta L_{H2}^0[\mathbf{J}_S, \beta\mathbf{n} \times \mathbf{J}_{S2}]\} &= \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

dette Combined Source Integral Equations (*CSIE*), che risultano prive di soluzioni spurie se  $\Re(\alpha) > 0$ ,  $\Re(\beta) > 0$  ([14], [15])



---

## Bibliografia

---

- [1] N. Morita, N. Kumagai e J. R. Mautz, *Integral equation methods for electromagnetics*. Norwood, MA: Artech House, 1987.
- [2] J. Wang, *Generalised moment methods in electromagnetics: formulation and computer solution*. New York, NY: Wiley, 1987.
- [3] C. Müller, *Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves*. Berlin, Germany: Springer Verlag, 1969.
- [4] R. E. Collin, *Field theory of guided waves*. Piscataway, NJ: IEEE Press, Cap. 6, 1991, 2<sup>a</sup> ed.
- [5] J. Van Bladel, *Singular electromagnetic fields and sources*. Oxford, UK: Clarendon Press, 1991.
- [6] Y. Rahmat-Samii, "On the question of computation of the dyadic Green's function at the source region in waveguides and cavities", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-23, pp. 762-765, sett. 1975.
- [7] W. A. Johnson, A. Q. Howard e D. G. Dudley, "On the irrotational component of the electric Green's dyadic", *Radio Science*, vol. 14, pp. 961-967, nov.-dic. 1979.
- [8] A. D. Yaghjian, "Electric dyadic Green's function in the source region", *IEEE Proceedings*, vol. 68, pp. 248-263, febr. 1980.
- [9] S. Lee, J. Boersma, C. Law e G. A. Deschamps, "Singularity in Green's function and its numerical evaluation", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-28, pp. 311-317, maggio 1980.
- [10] C. T. Tai, "Comments on 'Electric dyadic Green's function in the source region' ", *IEEE Proceedings*, vol. 69, pp. 282-285, feb. 1981.
- [11] J. S. Asvestas, "Comments on 'Singularity in Green's function and its numerical evaluation' ", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-31, pp. 174-177, genn. 1983.

- 
- [12] J. R. Mautz e R. F. Harrington, "H-field, E-field, and combined-field solutions for conducting bodies of revolution", *Archiv fur Elektronik und Übertragungstechnik*, Band 32, pp. 157-164, 1978.
- [13] J. R. Mautz e R. F. Harrington, "A combined-source solution for radiation and scattering from a perfectly conducting body", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-27, pp. 445-454, luglio 1979.
- [14] R. F. Harrington, "Boundary integral formulations for homogeneous material bodies", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 3, pp. 1-15, genn. 1989.
- [15] J. R. Mautz e R. F. Harrington, "Boundary formulations for aperture coupling problems", *Archiv fur Elektronik und Übertragungstechnik*, Band 34, pp. 377-384, 1980.
- [16] J. R. Mautz e R. F. Harrington, "Electromagnetic scattering from a homogeneous material body of revolution", *Archiv fur Elektronik und Übertragungstechnik*, Band 33, pp. 71-80, 1979.