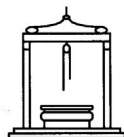


FACOLTÀ DI INGEGNERIA



SEMINARIO PER IL CORSO
DI CAMPI ELETTROMAGNETICI II

INTRODUZIONE ALLO SCATTERING INVERSO

PAOLO BURGHIGNOLI E GIAMPIERO LOVAT



Università "La Sapienza" di Roma

ROMA A.A. 2004-2005

Considerazioni generali

Nel corso di Campi Elettromagnetici II è stato presentato il problema di scattering di un'onda elettromagnetica piana da cilindro conduttore, per incidenza normale all'asse del cilindro, e si è visto come per tale geometria canonica sia possibile ottenere il campo scatterato per via analitica, esprimendolo mediante una serie di onde cilindriche. La possibilità di esprimere analiticamente il campo scatterato è in realtà eccezionale, essendo limitata per geometrie bidimensionali al caso di cilindri con sezione circolare o ellittica e a diedri, e per geometrie tridimensionali a sfere, ellissoidi e coni quadrici. Nella pratica però i problemi di scattering (anche detti di diffusione o di diffrazione), che sono comunissimi, coinvolgono gli oggetti più svariati, dalla forma arbitraria, costituiti da mezzi penetrabili o non penetrabili dalla radiazione, talvolta noti solo statisticamente. Tali problemi si possono descrivere secondo il seguente schema generale.

Sono assegnate le *sorgenti* del campo, sotto forma di correnti impresse, che irradiano in un certo *spazio ambiente* (ad esempio, lo spazio libero occupato da un mezzo lineare, stazionario, isotropo, omogeneo e non dispersivo, o una struttura costituita da più strati paralleli di mezzi diversi, o, ancora, una struttura guidante chiusa o aperta). All'interno di tale spazio è presente una regione limitata occupata da un oggetto (lo *scatteratore*) con caratteristiche diverse da quelle dello spazio ambiente. Il campo che le sorgenti irradierebbero nello spazio ambiente se lo scatteratore non ci fosse è detto, per definizione, *campo incidente*. Solitamente lo spazio ambiente è tale da rendere facile il calcolo del campo incidente (ad esempio, se lo spazio ambiente è lo spazio libero, si può calcolare il campo incidente mediante i potenziali elettrodinamici di Lorenz, che sono espressi da semplici integrali di convoluzione fra le correnti impresse e la funzione di Green scalare dello spazio libero $e^{-jkr}/4\pi r$). Portando le sorgenti all'infinito è poi possibile assumere come campo incidente un'onda piana uniforme o, più generalmente, un campo espresso da uno spettro di onde piane uniformi.

Il campo incidente non soddisferà, in generale, le relazioni costitutive nella regione dello scatteratore, oppure, se questo è impenetrabile alla radiazione, non soddisferà le condizioni al contorno sulla sua superficie di frontiera, proprio perché esso è definito in assenza dello scatteratore. Dunque, in presenza dello scatteratore, le sorgenti irradiano in tutto lo spazio un campo, detto *campo totale*, diverso dal campo incidente. Il campo definito all'*esterno* dello scatteratore come differenza fra il

campo totale e il campo incidente è detto *campo di scattering* o *campo scatterato*.

Il problema dello *scattering diretto* consiste nel determinare il campo totale essendo note le sorgenti e le caratteristiche dello scatteratore e dello spazio ambiente. Per quanto detto a proposito del campo incidente, la vera difficoltà sta nel calcolo del campo scatterato, per cui si potrebbe anche riformulare il problema dicendo che esso consiste nel determinare il campo scatterato, essendo noti il campo incidente e le caratteristiche dello scatteratore e dello spazio ambiente.

A volte non interessa la conoscenza completa del campo scatterato, ma solo di alcune sue caratteristiche. A questo proposito, si possono citare almeno due esempi significativi, il primo per onde in propagazione libera e il secondo per onde in propagazione guidata. In propagazione libera, si può ad esempio osservare il campo scatterato da un'oggetto ponendosi a grande distanza da esso, in modo tale da trovarsi nella regione cosiddetta di campo lontano o di Fraunhofer. In questo caso l'andamento del campo scatterato come funzione della distanza r dall'oggetto scatterante è noto (è del tipo e^{-jkr}/r), e ciò che interessa è il modo in cui si distribuisce angularmente la radiazione, cioè il suo diagramma di scattering, trascurando i dettagli del campo vicino all'oggetto stesso. In propagazione guidata, ha interesse descrivere le discontinuità presenti in una guida d'onda dal punto di vista dell'effetto che hanno sulla propagazione del modo fondamentale (supponendo, come spesso accade, di lavorare in regime armonico e in banda unimodale). A questo scopo, si può descrivere la discontinuità mediante pochi parametri complessi, che costituiscono una matrice detta appunto di scattering; tali parametri tengono conto indirettamente dell'effetto di tutti i modi di ordine superiore eccitati dalla discontinuità sulla propagazione del modo fondamentale, ma non forniscono informazioni dettagliate sulla struttura del campo vicino alla discontinuità stessa.

Lo scattering diretto è ormai un campo consolidato dell'elettromagnetismo, la cui importanza applicativa fa comunque sì che l'attività di ricerca ad esso connessa sia sempre intensa, sia su aspetti teorici sia sullo studio di metodi asintotici approssimati e soprattutto di tecniche numeriche efficienti.

Il problema dello *scattering inverso* è stato affrontato in tempi più recenti e consiste, viceversa, nel determinare l'oggetto scatterante a partire dalla conoscenza del campo incidente e del campo scatterato. Anche in questo caso si può essere interessati a ricostruire solo alcune proprietà dell'oggetto: nel caso più semplice si vuole solo stabilire se esso è presente o no; se ne può poi individuare la distanza dall'osservatore (è il caso del radar), o anche la velocità di avvicinamento o allontanamento (radar Doppler); se ne può cercare la forma, o certe caratteristiche topologiche come la connessione semplice o multipla (le proprietà del campo scatterato legate alle proprietà topologiche dello scatteratore sono oggetto di ricerche recenti e affascinanti, come quelle sullo scattering da nodi); se l'oggetto è penetrabile, si può cercare di determinare di quale mezzo, eventualmente non omogeneo, esso sia costituito; se invece l'oggetto è impenetrabile, si può cercare di determinare quali condizioni al contorno valgono

sulla sua superficie; e così via. In ogni caso, è generalmente disponibile qualche informazione a priori sullo scatteratore che ovviamente ne semplifica la ricostruzione.

Esempi di applicazioni in cui si presentano problemi di scattering inverso sono: il già citato radar; la diagnostica medica, ad esempio per individuare masse tumorali e, in generale, per ottenere immagini dell'interno del corpo umano; la prospezione geofisica, per individuare oggetti sepolti nel sottosuolo (esempi importanti sono le mine antiuomo, la cui individuazione e rimozione ha costi economici e umani altissimi, la manutenzione di tubature sotterranee, la ricerca di reperti archeologici); il testing non distruttivo di materiali (ad esempio, l'individuazione di vuoti o di imperfezioni al loro interno); e altre ancora.

Il problema dello scattering inverso è molto più difficile di quello diretto. La difficoltà è dovuta alla natura *nonlineare* e *malposta* del problema stesso. Obiettivo di questo seminario introduttivo è appunto quello di illustrare queste caratteristiche intrinseche dello scattering inverso, accennando nell'ultima parte ad alcune classi di metodi di ricostruzione di oggetti. A questo scopo, sarà necessario premettere alcuni risultati significativi della teoria dello scattering diretto. Tutta la teoria sarà svolta per semplicità nel caso bidimensionale, considerando scatteratori costituiti da un conduttore elettrico perfetto (PEC). In questo modo le Equazioni di Maxwell si disaccoppiano nelle polarizzazioni TE e TM, le equazioni risultanti sono dunque scalari e sono le stesse che si presentano nello scattering acustico bidimensionale.

Alcune avvertenze prima di cominciare. L'argomento dello scattering inverso è vastissimo e di grande attualità; l'attività di ricerca in questo campo è stata sempre più intensa negli ultimi venti anni, riguardando aspetti sia applicativi sia teorici. Questo seminario vuole essere solo una breve e parziale introduzione a tale argomento, nella quale si evidenziano le caratteristiche salienti del problema ponendo l'accento sui suoi aspetti analitici. Va detto chiaramente che gli autori sono assolutamente inesperti, essendosi avvicinati a questo tema negli ultimi due anni con il desiderio di intraprendere una nuova linea di ricerca. A questo scopo si sono documentati sullo stato attuale della teoria su vari libri e articoli, e in particolar modo su [1] e [2], da cui hanno tratto il materiale qui esposto e a cui rimandano per ogni ulteriore approfondimento.

Alcuni risultati notevoli della teoria dell'Equazione di Helmholtz e dello Scattering Diretto

2.1 Posizione del problema di scattering diretto

Consideriamo il seguente problema elettromagnetico. E' dato un cilindro perfettamente conduttore con asse parallelo all'asse z e sezione trasversa costituita da una regione limitata D del piano xy , posto nello spazio libero occupato da un mezzo lineare, stazionario, omogeneo, isotropo, non dispersivo e non dissipativo con parametri costitutivi μ e ε . Sono assegnate inoltre correnti impresse elettriche \mathbf{J} oppure magnetiche \mathbf{M} in regime armonico, con dipendenza dal tempo del tipo $e^{j\omega t}$ (d'ora in poi assunta e soppressa), dirette lungo l'asse z , indipendenti da z e diverse da zero in una regione limitata del piano xy oppure all'infinito (Fig. 2.1).

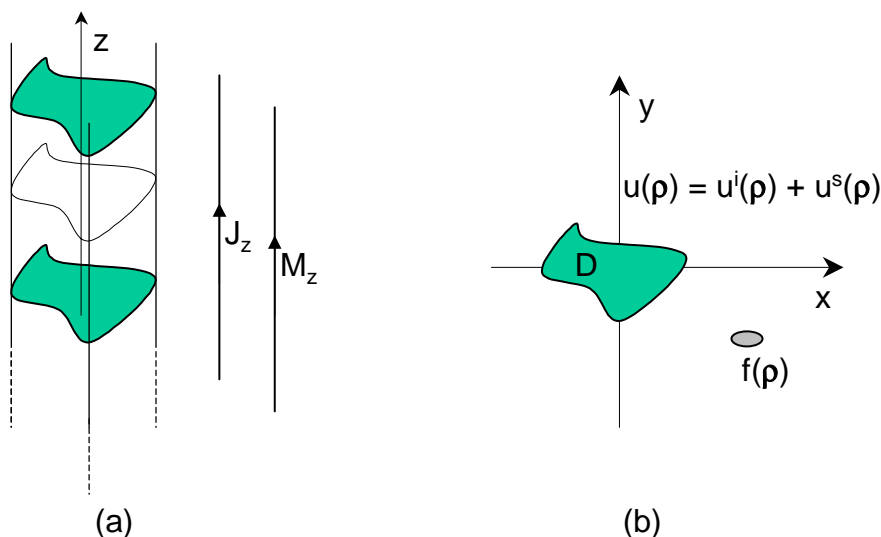


Figura 2.1: Geometria del problema di scattering da un cilindro infinito perfettamente conduttore (PEC): (a) cilindro PEC in presenza di sorgenti elettriche e magnetiche dirette lungo z e indipendenti da z ; (b) sezione trasversa del problema, con sorgenti f e campo totale u somma del campo incidente e del campo di scattering.

L'indipendenza da z della struttura e dell'eccitazione fa sì che le Equazioni di Maxwell per il campo eccitato dalle sorgenti in presenza del cilindro PEC (cioè il campo totale) si disaccoppino in due insiemi di equazioni, l'uno contenente le componenti E_z, H_x, H_y e J_z , l'altro le componenti H_z, E_x, E_y e M_z . Il primo insieme di componenti definisce un campo TM rispetto all'asse z , il secondo un campo TE rispetto allo stesso asse.

Come è noto, il campo TM si può descrivere in termini della sola componente non nulla del campo elettrico E_z (e della corrente impressa J_z), mentre il campo TE si può descrivere in termini della sola componente non nulla del campo magnetico H_z (e della corrente impressa M_z)¹. Tale componente, indicata nel seguito con u , deve soddisfare, come funzione delle variabili x e y , l'Equazione di Helmholtz non omogenea all'esterno della regione D , cioè:

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{\rho}) + k^2 u(\boldsymbol{\rho}) = f(\boldsymbol{\rho}) \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (2.1.1)$$

dove $u = E_z$, $f = -j\omega\mu J_z$ per il campo TM^z e $u = H_z$, $f = -j\omega\varepsilon M_z$ per il campo TE^z; $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ è la costante di propagazione del mezzo; $\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0 = \rho\boldsymbol{\rho}_0$ è il vettore posizione nel piano xy ; \bar{D} è la chiusura di D .

Come già detto, il campo totale u si può scrivere come $u = u^i + u^s$, dove $u = u^i$ è il campo incidente e $u = u^s$ è il campo scatterato. Il campo incidente, per definizione, soddisfa l'Equazione di Helmholtz in tutto il piano xy :

$$\nabla^2 u^i(\boldsymbol{\rho}) + k^2 u^i(\boldsymbol{\rho}) = f(\boldsymbol{\rho}) \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \quad (2.1.2)$$

Se le sorgenti si trovano al finito, avendole supposte presenti solo in una regione limitata del piano xy , si richiede che valga per il campo incidente la condizione di radiazione all'infinito (di Sommerfeld)

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \rho} + jku^i \right) = 0 \quad (2.1.3)$$

uniformemente rispetto a $\boldsymbol{\rho}_0$, ovvero rispetto alla coordinata polare ϕ , essendo $\boldsymbol{\rho}_0 = \cos \phi \mathbf{x}_0 + \sin \phi \mathbf{y}_0$.

Sottraendo la (2.1.2) dalla (2.1.1) e tenendo conto che $u - u^i = u^s$ si deduce che il campo scatterato soddisfa l'Equazione di Helmholtz omogenea all'esterno dello scatteratore:

$$\nabla^2 u^s(\boldsymbol{\rho}) + k^2 u^s(\boldsymbol{\rho}) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (2.1.4)$$

Si richiede inoltre che anche il campo scatterato, essendo dovuto alla presenza di uno scatteratore di dimensioni finite, verifichi la condizione di radiazione di Sommerfeld all'infinito

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial u^s}{\partial \rho} + jku^s \right) = 0 \quad (2.1.5)$$

¹Le altre componenti del campo elettromagnetico TM e TE si ricavano rispettivamente a partire da E_z, J_z e H_z, M_z mediante le Equazioni di Maxwell.

sempre uniformemente rispetto a ρ_0 .

Rimane da imporre una condizione al contorno sulla frontiera dello scatteratore: avendo ipotizzato che questo sia un cilindro PEC, si richiederà che sia nullo il componente tangenziale del campo elettrico sulla sua frontiera, cioè che $\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ su ∂D , essendo \mathbf{n}_0 il versore normale a S orientato verso l'esterno di D . Nel caso di polarizzazione TM, tale condizione al contorno implica che sia $E_z = u = 0$ su S (condizione al contorno di Dirichlet); nel caso TE, invece, dalla seconda Equazione di Maxwell si ha

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla_t \times (H_z \mathbf{z}_0) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla_t H_z \times \mathbf{z}_0$$

da cui

$$\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \mathbf{n}_0 \times (\nabla_t H_z \times \mathbf{z}_0) = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial n} \mathbf{z}_0$$

e pertanto si deduce che deve essere $\frac{\partial H_z}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ su S (condizione al contorno di Neumann).

In definitiva il problema di scattering diretto si può formulare mediante le equazioni

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(\boldsymbol{\rho}) + k^2 u(\boldsymbol{\rho}) &= f(\boldsymbol{\rho}) \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \\ u(\boldsymbol{\rho}) &= u^i(\boldsymbol{\rho}) + u^s(\boldsymbol{\rho}) \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial u^s}{\partial \rho} + jku^s \right) &= 0 \\ u(\boldsymbol{\rho}) &= 0 \quad (\text{TM}) \quad \text{su } \partial D \\ \frac{\partial u(\boldsymbol{\rho})}{\partial n} &= 0 \quad (\text{TE}) \quad \text{su } \partial D \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \nabla^2 u^s(\boldsymbol{\rho}) + k^2 u^s(\boldsymbol{\rho}) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial u^s}{\partial \rho} + jku^s \right) &= 0 \\ u^s(\boldsymbol{\rho}) &= -u^i(\boldsymbol{\rho}) \quad (\text{TM}) \quad \text{su } \partial D \\ \frac{\partial u^s(\boldsymbol{\rho})}{\partial n} &= -\frac{\partial u^i(\boldsymbol{\rho})}{\partial n} \quad (\text{TE}) \quad \text{su } \partial D \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

L'equazione chiave dei problemi di scattering è dunque l'Equazione di Helmholtz omogenea. Nel prossimo paragrafo riporteremo alcune proprietà fondamentali delle soluzioni di tale equazione.

2.2 Proprietà delle soluzioni dell'Equazione di Helmholtz omogenea

Una prima proprietà notevole di cui gode una funzione $u(\boldsymbol{\rho})$ soluzione dell'Equazione di Helmholtz omogenea in una regione $A \subset \mathbb{R}^2$ è la possibilità di essere rappresentata mediante un integrale di linea esteso alla frontiera ∂A nel quale intervengono i valori assunti su tale frontiera dalla u e dalla sua derivata normale $\frac{\partial u}{\partial n}$. Vale infatti il seguente teorema:

Teorema 2.2.1 (Rappresentazione di Helmholtz in un dominio limitato) Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un dominio limitato di classe C^2 ² con versore \mathbf{n}_0 normale alla frontiera ∂A diretto verso l'esterno di A . Sia $u \in C^2(A) \cap C^0(\bar{A})$ ³ una funzione dotata di derivata normale su ∂A , soluzione dell'Equazione di Helmholtz omogenea in A . Allora risulta

$$u(\boldsymbol{\rho}) = \oint_{\partial A} \left[\frac{\partial u(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n} \Phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') - u(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n} \right] d\boldsymbol{\rho}' \quad , \quad \boldsymbol{\rho} \in A \quad (2.2.1)$$

dove

$$\Phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) \quad (2.2.2)$$

è la funzione di Green per l'Equazione di Helmholtz nel piano che soddisfa la condizione di radiazione all'infinito di Sommerfeld.

DIM. Vedi [1]. ■

Una conseguenza immediata del Teorema 2.2.1 è il seguente

Teorema 2.2.2 (di analiticità) Se $u \in C^2(A)$ è soluzione della Equazione di Helmholtz omogenea in A , allora $u \in C^\omega(A)$, ossia u è analitica in A (cioè è la somma della propria serie di Taylor nell'intorno di ogni punto di A).

DIM. Per ogni $\boldsymbol{\rho} \in A$ basta applicare il Teorema 2.2.1 a una sfera con centro in $\boldsymbol{\rho}$ contenuta in A : il risultato è conseguenza dell'analiticità della funzione di Green $\Phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ per $\boldsymbol{\rho} \neq \boldsymbol{\rho}'$. ■

Il Teorema 2.2.2 implica poi che se una soluzione C^2 dell'Equazione di Helmholtz omogenea si annulla in un sottoinsieme aperto del suo insieme di definizione, allora essa è nulla ovunque. Nel seguito supporremo sempre verificate le ipotesi del Teorema 2.2.2.

E' possibile estendere il Teorema 2.2.1 al caso di una regione illimitata richiedendo che la u soddisfi all'infinito la condizione di radiazione di Sommerfeld. Se ciò accade la u si dice *soluzione radiante* dell'Equazione di Helmholtz e vale il seguente

Teorema 2.2.3 (Rappresentazione di Helmholtz in un dominio illimitato) Sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus D$ un insieme connesso, con D dominio limitato di classe C^2 , sia \mathbf{n}_0 il versore normale a ∂D diretto verso l'interno di A e sia $u \in C^2(A) \cap C^0(\bar{A})$ una funzione dotata di derivata normale su ∂A soluzione

²Si dice che un dominio $A \subset \mathbb{R}^2$ è di classe C^n , con $n \in \mathbb{N}$, se per ogni punto $\boldsymbol{\xi} \in \partial A$ esiste un insieme aperto $V \subset \mathbb{R}^2$ con $\boldsymbol{\xi} \in V$ e una funzione $\Psi \in C^n(B_1)$ tale che $\Psi(B_1) = V$ e $\Psi(\boldsymbol{\rho} \in B_1 \text{ t.c. } y \leq 0) = V \cap A$, dove $B_1 = \{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \rho \leq 1\}$ indica il cerchio unitario con centro nell'origine. Ricordiamo che una funzione si dice di classe C^n in un insieme A se è dotata di derivate parziali continue fino all'ordine n in A .

³Si tratta cioè di una funzione con derivate parziali continue fino all'ordine 2 nei punti interni di A , mentre la funzione stessa è continua fin sulla frontiera di A . L'ipotesi che la funzione sia continua fin sulla frontiera è tipica dei problemi al contorno per le equazioni a derivate parziali.

radiante dell'Equazione di Helmholtz in A . Allora risulta

$$u(\boldsymbol{\rho}) = \oint_{\partial A} \left[u(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n} - \frac{\partial u(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n} \Phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \right] d\boldsymbol{\rho}' \quad , \quad \boldsymbol{\rho} \in A \quad (2.2.3)$$

DIM. Vedi [1]. ■

Da questo teorema si deduce la conseguenza notevole che

$$u(\boldsymbol{\rho}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) \quad \text{per } \rho \longrightarrow \infty \quad (2.2.4)$$

uniformemente rispetto a ϕ , e inoltre che la condizione di Sommerfeld rimane soddisfatta trasladando arbitrariamente l'origine delle coordinate nel piano xy . Notiamo incidentalmente che spesso la (2.2.4) viene imposta a priori come condizione al contorno all'infinito insieme alla condizione di Sommerfeld; in realtà, essa è conseguenza di quest'ultima se u è soluzione dell'Equazione di Helmholtz omogenea. Ciò è dimostrato con il seguente

Teorema 2.2.4 (Definizione del far-field pattern) *Ogni soluzione radiante dell'Equazione di Helmholtz omogenea ha il comportamento asintotico di un'onda cilindrica uscente:*

$$u(\boldsymbol{\rho}) = \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \left[u^\infty(\boldsymbol{\rho}_0) + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right] \quad , \quad \rho \longrightarrow \infty \quad (2.2.5)$$

uniformemente rispetto a $\boldsymbol{\rho}_0$. La funzione $u^\infty(\boldsymbol{\rho}_0)$ è definita sulla circonferenza unitaria del piano $\Omega = \{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } |\boldsymbol{\rho}| = 1\}$ ed è detta far-field pattern di u^4 ; sotto le ipotesi del Teorema 2.2.3 si ha

$$u^\infty(\boldsymbol{\rho}_0) = \frac{1}{4j} \sqrt{\frac{2j}{\pi k}} \oint_{\partial A} \left[u(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial (e^{jk\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}'})}{\partial n} - \frac{\partial u(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n} e^{jk\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}'} \right] d\boldsymbol{\rho}' \quad (2.2.6)$$

DIM. Infatti dal fatto che

$$\Phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \frac{e^{-jk\rho}}{\sqrt{\rho}} \left[\frac{1}{4j} \sqrt{\frac{2j}{\pi k}} e^{jk\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}'} + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right] \quad , \quad \rho \longrightarrow \infty \quad (2.2.7)$$

si ha che il far-field pattern della funzione di Green $\Phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ è

$$\Phi^\infty(\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\rho}') = \frac{1}{4j} \sqrt{\frac{2j}{\pi k}} e^{jk\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}'}$$

Allora, dalla (2.2.3), segue immediatamente la tesi. ■

Nel corso di Campi Elettromagnetici II si è espresso il campo scatterato da un cilindro circolare PEC per incidenza di un'onda piana mediante funzioni cilindriche del tipo $H_n^{(2)}(k\rho)e^{-jn\phi}$. Il prossimo teorema garantisce che una rappresentazione simile vale per qualunque soluzione radiante dell'Equazione di Helmholtz omogenea definita all'esterno di un cerchio di raggio opportuno:

⁴Osserviamo che, essendo $\boldsymbol{\rho}_0 = \cos \phi \mathbf{x}_0 + \sin \phi \mathbf{y}_0$, si potrebbe anche scrivere $u^\infty(\phi)$, con $\phi \in [0, 2\pi)$.

Teorema 2.2.5 (Sviluppo in onde cilindriche) Sia u una soluzione radiante dell'Equazione di Helmholtz omogenea nel dominio illimitato A , e sia R tale che per l'insieme $A_R = \{\rho \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \rho > R\}$ sia $A_R \subset A$. Allora risulta:

$$u(\rho) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n H_n^{(2)}(k\rho) e^{-jn\phi} \quad , \quad \rho \in A \quad (2.2.8)$$

e tale serie converge assolutamente e uniformemente in ogni insieme chiuso e limitato contenuto in A_R . Viceversa, se la (2.2.8) converge sulla circonferenza $C_R = \{\rho \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \rho = R\}$, allora converge assolutamente e uniformemente in ogni insieme chiuso e limitato contenuto in A_R , e la funzione somma è ivi soluzione radiante dell'Equazione di Helmholtz.

DIM. Vedi [1]. ■

Il legame tra la rappresentazione di una soluzione radiante dell'Equazione di Helmholtz mediante onde cilindriche e il suo far-field pattern è fornito dal seguente

Teorema 2.2.6 (Caratterizzazione del far-field pattern) Il far-field pattern di una soluzione radiante dell'Equazione di Helmholtz omogenea rappresentata dalla (2.2.8) per $\rho > R$ è dato da

$$u^\infty(\rho_0) = \sqrt{\frac{2j}{\pi k}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^n a_n e^{-jn\phi} \quad (2.2.9)$$

e tale serie converge uniformemente in Ω . I coefficienti a_n soddisfano la condizione

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{2n}{ek\rho}\right)^n |a_n|^2 < \infty \quad , \quad \forall \rho > R \quad (2.2.10)$$

Viceversa, se vale la (2.2.10) allora la $u^\infty(\rho_0)$ definita dalla (2.2.9) è il far-field pattern di una soluzione dell'Equazione di Helmholtz omogenea in $A_R = \{\rho \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \rho > R\}$ data dalla (2.2.8).

DIM. Vedi [1]. ■

Questo teorema è notevole perché mette in luce il fatto che i coefficienti a_n dello sviluppo in onde cilindriche di una soluzione radiante dell'Equazione di Helmholtz devono tendere a zero molto rapidamente all'aumentare dell'ordine n .

2.3 Alcuni risultati sullo scattering diretto

Nella teoria dello scattering diretto si stabiliscono i seguenti risultati.

Teorema 2.3.1 (Esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati della soluzione) La soluzione del problema di scattering diretto (2.1.6) o (2.1.7) esiste, è unica e dipende con continuità sia dal campo incidente w^i sia dallo scatteratore D .

DIM. Vedi [1]. ■

La dimostrazione di questo risultato si basa sulla riformulazione del problema, espresso dalle (2.1.6) o (2.1.7) in forma differenziale, mediante equazioni integrali al contorno e su di essa non possiamo soffermarci. Vogliamo invece sottolineare il significato dell'ultima parte dell'enunciato, che riguarda la dipendenza della soluzione dai dati del problema.

In termini intuitivi, dire che la soluzione dipende con continuità dai dati significa che, perturbando 'poco' il campo incidente oppure lo scatteratore (deformandolo leggermente, ad esempio), anche il campo scatterato viene perturbato 'poco'. Per precisare questa idea è necessario disporre di un modo rigoroso di quantificare la differenza tra due campi (incidenti o scatterati) e tra due scatteratori. Sia i campi sia gli scatteratori vengono rappresentati matematicamente mediante funzioni di variabili reali (ad esempio, uno scatteratore bidimensionale D nel piano si può rappresentare mediante l'equazione in coordinate polari $\rho = \rho(\phi)$ della sua frontiera ∂D) e dunque bisogna disporre di una nozione di 'distanza' tra funzioni. Tecnicamente questo significa che bisogna precisare innanzitutto qual è l'insieme cui appartengono le funzioni stesse (ad esempio, l'insieme $C^0(A)$ delle funzioni continue su A , l'insieme $L^2(A)$ delle funzioni di quadrato sommabile su A , e così via) e definire in esso una *metrica*. Molto spesso gli spazi funzionali utilizzati hanno la struttura algebrica di spazio vettoriale (come nei due esempi appena citati) e allora si può introdurre una metrica definendo una norma vettoriale (spazi di Banach); in particolare, tale norma può essere definita tramite un prodotto scalare (spazi di Hilbert) [4].

Ai fini dello scattering inverso ha importanza essenziale approfondire il legame che c'è tra il campo scatterato $u^s(\boldsymbol{\rho})$ e il suo far-field pattern $u_s^\infty(\boldsymbol{\rho}_0)$. E' naturale chiedersi, ad esempio, se esistano due campi scatterati diversi che hanno lo stesso far-field pattern. A tale questione risponde il seguente

Teorema 2.3.2 (Lemma di Rellich) *Sia u una soluzione dell'Equazione di Helmholtz omogenea all'esterno di un cerchio di raggio a , tale che*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\rho=R} |u(\boldsymbol{\rho})|^2 dS = 0 \quad (2.3.1)$$

Allora risulta $u = 0$ identicamente in $A_a = \{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \rho > a\}$.

DIM. Vedi [1]. ■

Se due campi scatterati u_1^s e u_2^s avessero lo stesso far-field pattern u^∞ , allora il campo differenza $u_d = u_1^s - u_2^s$ avrebbe far-field pattern nullo, soddisfacendo la (2.3.1); il Teorema 2.3.2 permette allora di concludere che risulta $u_d(\boldsymbol{\rho}) = 0$ in A_a , cioè $u_2^s = u_1^s$ in A_a .

Come è facile comprendere, questo risultato è incoraggiante volendo ricostruire un oggetto a partire dalla conoscenza del far-field pattern del campo da esso scatterato. Tuttavia, come si vedrà nel prossi-

mo capitolo, esistono altri risultati sul legame tra campo scatterato e far-field pattern che rendono tale compito molto arduo.

Un'ultima proprietà che ci sarà utile nel seguito stabilisce un legame tra i campi scatterati da uno stesso oggetto dovuti a campi incidenti diversi. Per enunciarla adottiamo la seguente notazione: indichiamo con $u^i(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{d}_0) = e^{-jk\mathbf{d}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}}$ l'onda piana propagantesi lungo la direzione del versore \mathbf{d}_0 , con $u^s(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{d}_0)$ il corrispondente campo scatterato e con $u_s^\infty(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{d}_0)$ il far-field pattern di quest'ultimo. Vale allora il seguente

Teorema 2.3.3 (di reciprocità dei far-field pattern) *I far-field pattern dei campi scatterati da un cilindro PEC dovuti a onde piane incidenti sono legati dalla relazione*

$$u_s^\infty(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{d}_0) = u_s^\infty(-\mathbf{d}_0, -\boldsymbol{\rho}_0) \quad (2.3.2)$$

DIM. Vedi [1]. ■

Esplicitamente, la (2.3.2) dice che il far-field pattern del campo scatterato dovuto a un'onda piana incidente diretta secondo la direzione \mathbf{d}_0 osservato in direzione $\boldsymbol{\rho}_0$ è uguale al far-field pattern del campo scatterato dovuto a un'onda piana incidente diretta secondo la direzione $-\mathbf{d}_0$ osservato in direzione $-\boldsymbol{\rho}_0$, come illustrato in Fig. 2.2.

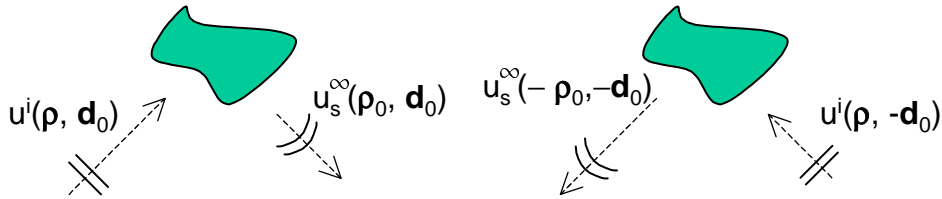


Figura 2.2: Illustrazione del Teorema di reciprocità dei far-field pattern.

E' anche possibile stabilire un legame tra i campi scatterati dovuti a campi incidenti prodotti da sorgenti elementari (linee di corrente) e campi scatterati dovuti a onde piane incidenti. Introduciamo a questo scopo la notazione seguente: sia $\Phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi})$ il campo incidente prodotto da una linea di corrente posta in $\boldsymbol{\xi}$ (si tratta della funzione di Green già introdotta $\Phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\xi}|)$), sia $\Phi^s(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi})$ il corrispondente campo scatterato, e sia $\Phi_s^\infty(\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\xi})$ il far-field pattern di quest'ultimo, come illustrato in Fig. 2.3.

Vale il seguente

Teorema 2.3.4 (di reciprocità misto) *Il campo scatterato da un cilindro PEC dovuto a un'onda piana incidente e il far-field pattern del campo scatterato dovuto a una linea di corrente sono legati dalla*

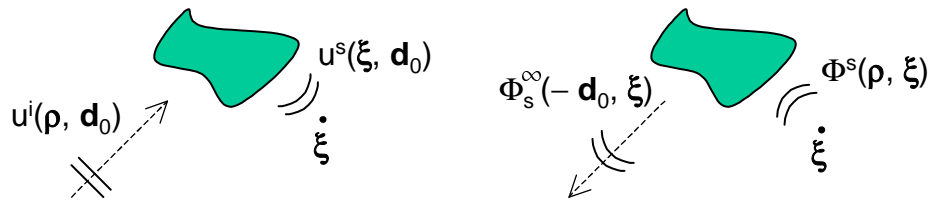


Figura 2.3: Illustrazione del Teorema di reciprocità misto.

relazione

$$\Phi_s^\infty(\rho_0, \xi) = \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} u^s(\xi, -\rho_0) \quad (2.3.3)$$

DIM. Vedi [2]. ■

3.1 Le caratteristiche salienti: nonlinearità e malposizione

Come accennato nell'introduzione, esistono molteplici problemi di scattering inverso, a seconda del tipo di dati di cui si dispone (campi scatterati vicini o lontani, numero e tipo di campi incidenti, a una o più frequenze o nel dominio del tempo), delle caratteristiche dello scatteratore che ci si propone di ricostruire e del tipo di informazioni a priori sullo scatteratore di cui si dispone. In questo capitolo concentreremo l'attenzione sul problema della ricostruzione della sezione D di uno scatteratore cilindrico PEC a partire dalla conoscenza del far-field pattern del campo scatterato per uno o più campi incidenti a una frequenza fissata.

La prima caratteristica tipica del problema inverso, che lo differenzia dal problema diretto, è la sua *nonlinearità*. Con questo termine si intende quanto segue. Si immagina di aver ridotto il problema nella forma matematica di un'equazione funzionale del tipo

$$T(f) = g \quad (3.1.1)$$

dove f è la funzione incognita, appartenente a un certo spazio funzionale A , g è una funzione nota, appartenente a un certo spazio funzionale B , e T è un operatore che ha A come dominio e B come codominio. Dire che il problema è nonlineare significa dire che l'operatore T è nonlineare.

Ad esempio, nello scattering diretto si può pensare come incognita la corrente superficiale che si stabilisce sulla frontiera ∂D (nota) del cilindro PEC e come termine noto il campo incidente \vec{u}^i . Dalla linearità delle equazioni differenziali di Helmholtz che figurano nelle (2.1.6) e (2.1.7) e delle relative condizioni al contorno si deduce che l'operatore T coinvolto (che si potrebbe scrivere esplicitamente sotto forma di un operatore integrale al contorno) è lineare.

Nel caso dello scattering inverso, la funzione incognita è quella che definisce la frontiera dello scatteratore ∂D e il termine noto può ad esempio essere il far-field pattern del campo scatterato per un assegnato campo incidente. In questo caso l'operatore T non è affatto lineare: a parità di campo incidente, il campo scatterato da un oggetto la cui frontiera è descritta dalla combinazione lineare di due

funzioni f_1 e f_2 non è la combinazione lineare dei campi scatterati dagli oggetti descritti separatamente dalle medesime funzioni.

Esistono molte formulazioni alternative del tipo (3.1.1) per il problema dello scattering inverso, in cui possono comparire funzioni note e incognite ausiliarie e operatori più o meno sofisticati. In ogni caso si manifesta la nonlinearietà appena descritta che, come è comprensibile, complica notevolmente la risoluzione del problema stesso, sia dal punto di vista teorico (l'analisi degli operatori lineari è molto più avanzata di quelli nonlineari) sia da quello numerico. Facendo opportune ipotesi a priori sullo scatteratore è talvolta possibile adottare una tecnica approssimata, in cui si sostituisce all'operatore T nonlineare una sua versione approssimata, appunto, ma lineare. Nel caso più generale, tuttavia, sarà necessario fronteggiare la natura nonlineare dell'operatore per mezzo di opportune strategie di risoluzione (ne vedremo qualche cenno nel prossimo paragrafo).

La seconda caratteristica tipica del problema di scattering inverso è la sua malposizione. Secondo la definizione di Hadamard, si dice che un problema espresso matematicamente da un'equazione del tipo (3.1.1) è malposto quando non sussiste anche una sola delle seguenti tre proprietà:

Esistenza La soluzione del problema esiste per ogni scelta della funzione nota g nel suo insieme di definizione B . In termini dell'operatore T , questo significa che l'operatore è suriettivo, cioè l'immagine del suo dominio A invade tutto il codominio B .

Unicità La soluzione del problema è unica per ogni g per cui la soluzione esiste. In termini dell'operatore T , questo significa che l'operatore è iniettivo, cioè che porta elementi distinti di A in elementi distinti di B .

Regolarità La soluzione del problema dipende con continuità dalla funzione nota g . In termini dell'operatore T , questo significa che l'operatore inverso T^{-1} è continuo da $T(A) \subset B$ ad A .

Illustriamo queste tre proprietà nel caso dello scattering inverso.

Per discutere l'esistenza della soluzione, supponiamo che il codominio B dell'operatore T sia lo spazio funzionale cui appartiene il far-field pattern del campo scatterato (ad esempio lo spazio $L^2(\Omega)$) e il dominio A sia lo spazio dei possibili scatteratori. Ci si deve chiedere allora se, scelta ad arbitrio una funzione nello spazio B , questa può essere il far-field pattern di un possibile campo scatterato. La risposta a questa domanda è negativa e può essere ottenuta come conseguenza della caratterizzazione dei far-field pattern riportata nel Teorema 2.2.6. Infatti, una funzione arbitraria di $L^2(\Omega)$ può essere rappresentata come serie di esponenziali $e^{-jn\phi}$ (formando questi un insieme completo): tuttavia i coefficienti a_n di tale rappresentazione non soddisfano necessariamente la condizione (2.2.10), che richiede che essi tendano a zero molto rapidamente al crescere dell'ordine n .

Va notato che la condizione (2.2.10), che è necessaria e sufficiente affinché un elemento di B sia il far-field pattern di una soluzione radiante dell'Equazione di Helmholtz all'esterno di un cerchio, è solo necessaria affinché un elemento di B sia il far-field pattern di un campo scatterato, poiché non tutte le soluzioni radiantanti dell'Equazione di Helmholtz sono campi scatterati. Al momento non sembra essere disponibile una caratterizzazione dell'insieme dei far-field pattern di tutti i possibili campi scatterati.

La conseguenza di tutto ciò è che il far-field pattern misurato, essendo inevitabilmente affetto da errori di misura, potrebbe non appartenere all'insieme $T(A) \subset B$ dei possibili campi scatterati, rendendo a rigore impossibile la determinazione dell'oggetto scatterante. In pratica, bisognerà approssimare il campo misurato con un campo appartenente a $T(A)$ per cui la soluzione esiste; a questo scopo si hanno teoremi che stabiliscono che i campi scatterati per certi insiemi di campi incidenti (ad esempio, per una fissata onda piana, o per tutte le possibili onde piane) costituiscono un sottoinsieme denso di B , cioè tale che un elemento qualunque di B si possa approssimare con precisione arbitraria tramite elementi di tale sottoinsieme [2].

L'unicità della soluzione richiede invece di individuare insiemi di dati, ad esempio numero e tipo di campi incidenti per cui si suppone di conoscere il far-field pattern del relativo campo scatterato, che determinino univocamente l'oggetto scatterante. Esistono numerosi teoremi al riguardo. Qui ne presentiamo solo uno, che è tuttavia significativo e la cui dimostrazione è un'applicazione istruttiva dei risultati richiamati nel capitolo precedente:

Teorema 3.1.1 (Isakov, Kirsch e Kress) *Siano D_1 e D_2 le sezioni di due cilindri PEC. Se i far-field pattern $u_1^\infty(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{d}_0)$ e $u_2^\infty(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{d}_0)$ coincidono per ogni $\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{d}_0 \in \Omega$, allora $D_1 = D_2$.*

DIM. Sia D_e la parte illimitata di $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{(D_1 \cup D_2)}$. Dall'ipotesi

$$u_1^\infty(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{d}_0) = u_2^\infty(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{d}_0) \quad , \quad \forall \boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{d}_0 \in \Omega \quad (3.1.2)$$

e dal Lemma di Rellich 2.3.2 si ottiene intanto

$$u_1^s(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{d}_0) = u_2^s(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{d}_0) \quad , \quad \boldsymbol{\rho} \in D_e, \forall \mathbf{d}_0 \in \Omega \quad (3.1.3)$$

Mediante la relazione di reciprocità mista espressa dal Teorema 2.3.4 applicata ad ambo i membri si ottiene

$$\Phi_{1_s}^\infty(\mathbf{d}_0, \boldsymbol{\rho}) = \Phi_{2_s}^\infty(\mathbf{d}_0, \boldsymbol{\rho}) \quad , \quad \boldsymbol{\rho} \in D_e, \forall \mathbf{d}_0 \in \Omega \quad (3.1.4)$$

e ancora mediante il Lemma di Rellich si ottiene

$$\Phi_1^s(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho}) = \Phi_2^s(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho}) \quad , \quad \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\xi} \in D_e \quad (3.1.5)$$

A questo punto si giunge alla conclusione osservando che il campo scatterato $\Phi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho})$ dovuto a una sorgente lineare posta in $\boldsymbol{\rho}$, essendo uguale e opposto al campo incidente $\Phi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\rho})$ sulla frontiera

∂D dello scatteratore, deve tendere all'infinito con tutte le sue derivate quando $\rho \rightarrow \xi \in \partial D$. Supponiamo allora che sia $\partial D_1 \setminus \bar{D}_2 \neq \emptyset$ e $\xi_* \in \partial D_1 \setminus \bar{D}_2$, come mostrato in Fig. 3.1. Allora facendo tendere ρ a ξ_* il campo $\Phi_2^s(\xi_*, \rho)$ rimane finito, essendo $\xi_* \notin \partial D_2$, mentre il campo $\Phi_1^s(\xi_*, \rho)$ deve tendere all'infinito, poiché $\xi_* \in \partial D_1$. Dall'uguaglianza (3.1.5) si ottiene una contraddizione e si deduce quindi che non può essere $\partial D_1 \setminus \bar{D}_2 \neq \emptyset$. Scambiando il ruolo di D_1 e D_2 , si deduce analogamente che non può essere $\partial D_2 \setminus \bar{D}_1 \neq \emptyset$ e si conclude quindi che necessariamente $D_1 = D_2$.

■

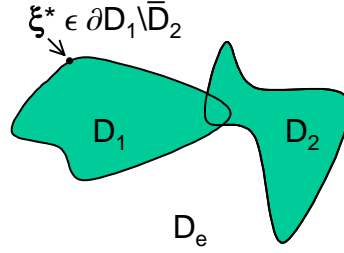


Figura 3.1: Illustrazione dell'ipotesi $\xi_* \in \partial D_1 \setminus \bar{D}_2$ per la dimostrazione del Teorema 3.1.1.

Questo Teorema garantisce l'unicità dello scatteratore supponendo di conoscere il far-field pattern in tutte le direzioni dovuto a onde piane incidenti da tutte le possibili direzioni. In pratica non si dispone di tutte queste informazioni, ad esempio si conosce il far-field pattern solo per un numero finito di onde piane incidenti e per un numero finito di direzioni di osservazione. In questo caso è ancora possibile avere l'unicità dello scatteratore, a patto di disporre di qualche informazione a priori su di esso. Un esempio è fornito dal seguente teorema, in cui si ipotizza di conoscere un limite superiore alle dimensioni dello scatteratore:

Teorema 3.1.2 (Unicità per un numero finito di campi incidenti) *Siano D_1 e D_2 le sezioni di due cilindri PEC. Se D_1 e D_2 sono contenute in un cerchio di raggio R , sia*

$$N = \sum_{t_{nl} < kR} (2n + 1) \quad (3.1.6)$$

dove t_{nl} sono gli zeri reali positivi delle funzioni di Bessel $J_n(t)$. Allora se i far-field pattern dei due scatteratori coincidono per $N + 1$ onde piane incidenti propagantesi in direzioni distinte, si ha $D_1 = D_2$.

DIM. Vedi [1]. ■

Discutiamo infine il significato della *regolarità*. Si tratta della caratteristica più tipica dei problemi malposti, di cui lo scattering inverso è solo un esempio.

L'esempio più immediato di operatore con inverso discontinuo che si presenta nella teoria dello scattering inverso è l'operatore F (lineare e continuo) che trasforma una soluzione radiante $u(\boldsymbol{\rho})$ dell'Equazione di Helmholtz, considerata su una circonferenza fissata $C_R = \{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \rho = R\}$, nel suo far-field pattern $u^\infty(\boldsymbol{\rho}_0)$. Come già detto, per parlare di continuità introduciamo una metrica negli spazi A e B , dominio e codominio dell'operatore; in particolare, supponiamo che sia $A = B = L^2(\Omega)$, con la metrica indotta dall'usuale prodotto scalare in L^2 ¹. L'operatore inverso F^{-1} consente di ricostruire la soluzione $f(\boldsymbol{\rho}_0) = u(R\boldsymbol{\rho}_0)$ sulla circonferenza detta a partire dal far-field pattern $g(\boldsymbol{\rho}_0) = u^\infty(\boldsymbol{\rho}_0)$. Se F^{-1} fosse continuo, ogni successione di far-field pattern convergente alla funzione identicamente nulla in B dovrebbe essere trasformata da F^{-1} in una successione di funzioni convergenti alla funzione nulla in A . Ma è possibile mostrare su un esempio che questo può non accadere.

Infatti, si consideri la successione di soluzioni radianti dell'Equazione di Helmholtz omogenea

$$u_n(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{n} H_n^{(2)}(k\rho) e^{-jn\phi} \quad (3.1.7)$$

I far-field pattern delle (3.1.7) sono dati da

$$u_n^\infty(\boldsymbol{\rho}_0) = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2j^n}{\pi k}} e^{-jn\phi} \quad (3.1.8)$$

e si verifica facilmente che tale successione di funzioni converge a zero in $L^2(\Omega)$. La successione delle funzioni (3.1.7), al contrario, non converge puntualmente in alcun punto del piano, a causa del comportamento asintotico per grandi valori dell'ordine n delle funzioni di Hankel:

$$H_n^{(2)}(z) \sim j \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{2n}{ez}\right)^n \quad (3.1.9)$$

pertanto si conclude che la successione delle funzioni (3.1.7) sulla circonferenza C_R non può convergere in $L^2(\Omega)$.

La mancanza di regolarità rende il problema inverso particolarmente complesso. Infatti, in presenza di inevitabili e sia pur minimi errori di misura δu_s^∞ nel far-field u_s^∞ del campo scatterato, il campo scatterato \tilde{u}^s che ha il far-field $u_s^\infty + \delta u_s^\infty$, ammesso che esista, potrebbe essere completamente diverso dal campo scatterato effettivo u^s . Questo rende impossibile basare la ricostruzione direttamente sull'operatore inverso F^{-1} . È necessario, invece, approssimare F^{-1} mediante opportune successioni di operatori lineari e continui, che costituiscono la cosiddetta *regolarizzazione* del problema. Esistono molte tecniche di regolarizzazione, anzi, il loro studio costituisce un intero capitolo dell'Analisi Funzionale applicata, nel quale però non possiamo qui addentrarci, rimandando a [3].

¹Date $f, g \in L^2(\Omega)$ si ha:

$$d(f, g) = \int_{\Omega} |f - g|^2 d\Omega$$

3.2 Alcune classi di metodi di ricostruzione

Accenniamo infine brevemente ad alcune possibili strategie di ricostruzione di oggetti PEC a partire dalla conoscenza del far-field pattern del campo scatterato per un'arbitraria onda piana incidente.

Una delle prime tecniche adottate equivale in linea di principio a un metodo *iterativo* di ricerca delle soluzioni di un'equazione nonlineare. Data un'equazione del tipo $\phi(x) = 0$, con ϕ funzione arbitraria non lineare della variabile reale x , si può cercare una sua soluzione scegliendo un valore iniziale $x^{(0)}$ e costruendo a partire da questo una successione $\{x^{(n)}\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, che converge alla soluzione \bar{x} cercata. La successione viene determinata da una legge ricorsiva del tipo $x^{(n+1)} = f(x^{(n)})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, che esprime il suo elemento $(n + 1)$ -esimo a partire dall'elemento n -esimo. Esempi di leggi ricorsive di questo tipo sono il metodo delle secanti e il metodo di Newton, che sono usualmente illustrati nei corsi di base di Analisi Numerica.

Ebbene, è possibile adottare una strategia simile anche per ricostruire uno scatteratore: si parte da un dominio iniziale di prova $D^{(0)}$, si calcolano i campi scatterati da $D^{(0)}$ per campi incidenti assegnati e si confrontano tali campi con quelli prodotti dall'oggetto incognito D : dal confronto si trae una legge che consente di passare da $D^{(0)}$ al successivo $D^{(1)}$; e così via. E' evidente che questo approccio, richiedendo la soluzione di uno o più problemi diretti a ogni passo, risulta essere molto oneroso dal punto di vista computazionale.

Una seconda classe di metodi consiste nella divisione del problema inverso in *due* sottoproblemi distinti, *uno lineare e malposto*, che consiste sostanzialmente nella determinazione (approssimata) del campo scatterato a partire dal suo far-field pattern, *l'altro nonlineare ma benposto*, che consiste nel determinare la frontiera ∂D dello scatteratore in base alla conoscenza dei campi incidente e scatterato e della condizione al contorno che deve valere sulla ∂D .

Supponiamo, ad esempio, di conoscere qualche informazione a priori sulla posizione e sulle dimensioni dell'oggetto incognito, sulla cui frontiera supponiamo valga la condizione al contorno di Dirichlet (polarizzazione TM), in modo da poter stabilire che una certa circonferenza $C_a = \{\rho \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \rho = a\}$ si trova tutta al suo interno. Si può allora cercare qual è la distribuzione di densità di corrente J_z impressa che, posta sulla frontiera del cilindro con sezione C_a , irradia un campo con lo stesso far-field pattern del campo scatterato dall'oggetto incognito per un assegnato campo incidente. Questo è un problema lineare, poiché il supporto della distribuzione di corrente da determinare è noto (è la circonferenza C_a), e può essere formulato mediante un'equazione integrale nella corrente incognita J_z .

Il campo irradiato dalla J_z , essendo una soluzione radiante dell'Equazione di Helmholtz all'esterno di C_a con lo stesso far-field pattern del campo scatterato, deve coincidere con il campo scatterato al di fuori dello scatteratore D , in virtù del Lemma di Rellich 2.3.2. Dunque, per quanto detto a proposito

del legame tra una soluzione radiante dell'Equazione di Helmholtz e il suo far-field pattern, l'equazione funzionale da risolvere per trovare la J_z sarà lineare, ma malposta.

Una volta trovato il campo scatterato, la frontiera ∂D dello scatteratore incognito si può determinare come il luogo dei punti dove la somma del campo scatterato e del campo incidente soddisfa la condizione al contorno di Dirichlet, cioè come il luogo dei punti dove $u^i + u^s = 0$. Questo secondo passo è di natura nonlineare, ma benposta.

La terza classe di metodi cui accenniamo è la più recente e presenta il vantaggio, rispetto alla precedente, di non richiedere la conoscenza a priori della condizione al contorno che deve valere sulla frontiera dell'oggetto da ricostruire. Si tratta dei metodi cosiddetti di *linear sampling*.

Essi richiedono di conoscere a priori la posizione dell'oggetto incognito D , nel senso che deve essere noto un dominio R contenente D . Si procede quindi alla suddivisione di R mediante un reticolo di punti, ad esempio un reticolo a maglia quadrata con un certo periodo spaziale opportunamente minore delle previste dimensioni di D . Per ogni punto ξ di tale reticolo si scrive un'equazione integrale lineare, il cui kernel è proprio il far-field pattern $u_\xi^\infty(\rho_0, \mathbf{d}_0)$ del campo scatterato da D per ogni onda piana incidente, in una certa funzione incognita $g(\mathbf{d}_0, \xi)$, con termine noto dato dal far-field pattern della funzione di Green $\Phi(\rho, \xi)$ in direzione ρ_0 :

$$\int_{\Omega} u_s^\infty(\rho_0, \mathbf{d}_0) g(\mathbf{d}_0, \xi) d\mathbf{d}_0 = \Phi^\infty(\rho_0, \xi) \quad (3.2.1)$$

Ebbene, è possibile mostrare che la norma L^2 della soluzione di tale equazione, che è lineare e malposta, tende all'infinito quando il punto ξ tende a ∂D . Risolvendo dunque la (3.2.1) per tutti i punti del reticolo, sarà possibile determinare, anche se in modo approssimato, le linee isolivello della norma L^2 di g all'interno della regione R e individuare così la linea di frontiera ∂D dell'oggetto incognito.

Bibliografia

- [1] D. Colton e R. Kress, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. Berlin: Springer, 1998, seconda edizione.
- [2] R. Potthast, *Point sources and multipoles in inverse scattering theory*. London: Chapman and Hall/CRC, 2001.
- [3] A. Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Berlin: Springer, 1996.
- [4] G. Bachmann e L. Narici, *Functional analysis*. New York: Dover, 1998.